

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 17. – rozwiązania

30 kwietnia 2021

1. Obliczyć macierze $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ we wszystkich sytuacjach, w których te działania mają sens:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+1+0 & 2+6+4 & 1+0+8 \\ 4+1+0 & 4+6+3 & 2+0+6 \\ 0+1+0 & 0+6+1 & 0+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 \\ 5 & 13 & 8 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 15 \\ 13 & 7 & 22 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 16 & 34 \\ 39 & 48 \end{bmatrix}$$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}.$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 14 \end{bmatrix}.$$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

2. Znaleźć macierz A^{-1} we wszystkich przypadkach, gdy istnieje dla

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & -2/11 & 3/11 \end{array} \right],$$

zatem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/11 & -2/11 \\ -2/11 & 3/11 \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix},$

$\det A = 0$, więc A^{-1} nie istnieje.

$$c) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1/2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 2 \end{array} \right],$$

zatem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -4 \\ -2 & 1/2 & 5 \\ -1 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Które z poniższych odwzorowań $\varphi: V \rightarrow W$ są przekształceniami liniowymi?

- a) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - 1, 4x + 2y + 6),$
- b) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - z, 4x + 2y + 6z),$
- c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - z, 4|x| + 2|y| + 6|z|),$
- d) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), W = \mathbb{R}, \varphi(f) = 4f(5) - 5f(4).$

a) nie, bo $\varphi(2(0, 0, 0)) = \varphi((0, 0, 0)) = (-1, 6)$, ale $2\varphi((0, 0, 0)) = 2(-1, 6) = (-2, 12).$

b) tak, bo dla dowolnego $g \in \mathbb{R}$ oraz dowolnych wektorów $(a, b, c), (d, e, f)$ zachodzi

$$\begin{aligned} \varphi((a, b, c) + (d, e, f)) &= \varphi((a + d, b + e, c + f)) = \\ (a + d + 3b + 3e - c - f, 4a + 4d + 2b + 2e + 6c + 6f) &= (a + 3b - c, 4a + 2b + 6c) + (d + 3e - f, 4d + 2e + 6f) = \\ &= \varphi((a, b, c)) + \varphi((d, e, f)) \end{aligned}$$

$$\text{oraz } \varphi(g(a, b, c))\varphi((ga, gb, gc)) = (ga + 3gb - gc, 4ga + 2gb + 6gc) = g(a + 3b - c, 4a + 2b + 6c) = g\varphi((a, b, c)).$$

c) nie, bo $\varphi(-1(1, 0, 0)) = \varphi((-1, 0, 0)) = (-1, 4)$, ale $(-1)\varphi((1, 0, 0)) = (-1)(1, 4) = (-1, -4).$

d) tak, bo dla dowolnych funkcji $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\varphi((g+h)) = 4(g+h)(5) - 5(g+h)(4) = 4g(5) + 4h(5) - 5g(4) - 5h(4) = \varphi(g) + \varphi(h)$ oraz $\varphi(ag) = 4ag(5) - 5ag(4) = a\varphi(g).$

4. Znaleźć wzór przekształcenia liniowego $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniającego warunki $f((3, 1)) = (4, 5, -1)$ oraz $f((7, 2)) = (-3, 5, 0).$

$$f((1, 0)) = f((7, 2) - 2(3, 1)) = f(7, 2) - 2f(3, 1) = (-3, 5, 0) - 2(4, 5, -1) = (-11, -5, 2)$$

$$f((0, 1)) = f((3, 1) - 3(1, 0)) = (4, 5, -1) - 3(-11, -5, 2) = (37, 20, -7),$$

zatem

$$f((x, y)) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = x(-11, -5, 2) + y(37, 20, -7) = (11x + 37y, -5x + 20y, 2x - 7y).$$

5. Znaleźć wzór na przekształcenia liniowego zadanego warunkami $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((1, 0, 1)) = (5, 1, 3), \varphi((0, 1, 1)) = (2, 3, 4), \varphi((1, 0, 0)) = (6, 7, 7).$

Zadanie polega po pierwsze na znalezieniu współrzędnych wektorów z bazy standardowej w bazie użytej w zadaniu. W pierwszym przykładzie (oznaczymy $\alpha = (1, 0, 1), \beta = (0, 1, 1), \gamma = (1, 0, 0)$) widać od razu, że $(1, 0, 0) = \gamma, (0, 0, 1) = \alpha - \gamma$ oraz $(0, 1, 0) = -\alpha + \beta + \gamma$. Czyli $\varphi((1, 0, 0)) = (6, 7, 7), \varphi((0, 1, 0)) = -(5, 1, 3) + (2, 3, 4) + (6, 7, 7) = (3, 9, 8)$ oraz $\varphi((0, 0, 1)) = (5, 1, 3) - (6, 7, 7) = (-1, -6, -4)$, a więc ostatecznie $\varphi((x, y, z)) = (6x + 3y - z, 7x + 9y - 6z, 7x + 8y - 4z).$

Można też cały proces zapisać przy pomocy macierzy

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -6 & -4 \end{array} \right].$$

6. Dla przekształcenia $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi((x, y, z)) = (4x + 3y + 5z, x + 2y + z, 2x - y + 3z, 6x + 7y + 7z)$ znaleźć bazę i wymiar jego obrazu oraz bazę i wymiar jego jądra.

Trzeba znaleźć najpierw bazę obrazu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 5w_1} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 6 & -12 & 12 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot (1/5)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 6w_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A zatem $((1, -1, 3, -1), (0, 1, -2, 2))$ jest bazą $\text{im } \varphi$ oraz $\dim \text{im } \varphi = 2$.

Aby znaleźć bazę i wymiar $\ker \varphi$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 2w_1, w_4 - 6w_1} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 - w_2, w_3 - w_2, w_4 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zatem $((-7, 1, 5))$ jest bazą $\ker \varphi$, a $\dim \ker \varphi = 1$.