

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021

ćwiczenia 16. – rozwiązania

26 kwietnia 2021

1. Które dwa spośród wektorów $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ tworzą z wektorem $(2, 3, 0)$ bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$?
Trzeba koniecznie wziąć $(0, 0, 1)$ i dowolny z dwóch pozostałych. Aby zrozumieć dlaczego wpisz je w wiersze macierzy.

2. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni

- a) $\text{lin}((2, 1, 3), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 5))$.
b) $\text{lin}((3, 2, 1, 1), (5, 0, 2, 3), (4, 1, 4, 5), (4, 1, -1, -1))$.
c) $\text{lin}((2, 7, -1, 2, 0), (3, 1, 4, 2, 0), (4, -5, 9, 2, 0), (5, 15, 2, 6, 0))$.

- a) Wpisujemy w macierz i sprowadzamy do postaci schodkowej:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 13 \\ 7 & 7 & 7 \\ -4 & -9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{7}} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 2w_1, w_5 + 4w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 5w_2, w_4 + w_2, w_5 + 5w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - w_5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A zatem baza to $\{(1, 1, 1), (0, 1, -2), (0, 0, -1)\}$, a jej wymiar to 3.

- b) Dla uproszczenia rachunków współrzędne zapiszemy w macierzy od końca:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 5w_1, w_4 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & -1 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli, pamiętając, że zapisaliśmy wszystkie wektory od tyłu, przykładowa baza to $(3, 2, 1, 1), (-4, -6, -1, 0), (-7, -3, 0, 0)$, a wymiar to 3.

c) Trzecia podprzestrzeń, dla ułatwienia rachunków zapisujemy w kolejności współrzędnych

$$x_4, x_1, x_2, x_3, x_5 :$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 9 & 0 \\ 6 & 5 & 15 & 2 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1, w_4 - 3w_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2, w_4 + w_2} \\ &\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 10 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Więc baza to $\{(2, 7, -1, 2, 0), (1, -6, 5, 0, 0), (0, -12, 10, 0, 0)\}$, a jej wymiar to 3.

3. Znaleźć współrzędne wektora $(5, 0, 0)$ w bazie zadanej wektorami $(1, 2, -1), (1, 0, 2), (0, 1, 1)$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 3w_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -20 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{2}, w_3 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + \frac{1}{2}w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli szukane współrzędne to 2, 3, -4 i rzeczywiście: $2(1, 2, -1) + 3(1, 0, 2) - 4(0, 1, 1) = (5, 0, 0)$.

4. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni opisanej następującym układem równań liniowych.

a)

$$\begin{cases} 9x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 5a + 10b + 6c + 3d = 0 \\ 2a + 4b + 4c + 3d = 0 \\ 3a + 6b + 5c + 5d = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 7x + 3y + 5z + 2t + 8w = 0 \\ 3x + y + z - 4t + 6w = 0 \\ 2x + y + 2z + 3t + w = 0 \end{cases}$$

a) Wskazówka: zapisz ten układ w kolejności zmiennych x_3, x_2, x_1 i sprowadź macierz do postaci schodkowej zredukowanej. Rozwiązanie ogólne to:

$$x_2 = -13\frac{x_1}{18}, x_3 = -\frac{x_1}{6},$$

zatem ta podprzestrzeń ma wymiar jeden, a jej baza to $\{(18, -13, 3)\}$.

b) Rozwiązujemy (zerową kolumnę wyrazów wolnych mamy w pamięci):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot 2, w_3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 10 & 20 & 12 & 6 \\ 6 & 12 & 10 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 5w_1, w_3 - 3w_1} \\ &\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 4w_2, w_1 + 2w_2} \\ &\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{2}, w_2 \cdot \frac{-1}{2}, w_3 \cdot \frac{1}{7}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + \frac{5}{2}w_3, w_2 - 2w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(-2b, b, 0, 0)$, wymiar wynosi 1, a przykładowy wektor bazowy to $(-2, 1, 0, 0)$.

c) Rozwiązujemy układ równań (wypisujemy w kolejności y, x, z, t, w):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - w_1} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 14 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 17 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zatem pamiętając o kolejności zmiennych rozwiązanie w postaci parametrycznej, to $(z + 7t - 5w, -4z - 17t + 9w, z, t, w)$, więc baza to $\{(1, -4, 1, 0, 0), (7, -17, 0, 1, 0), (-5, 9, 0, 0, 1)\}$ a wymiar to 3.

5. Opisać przestrzeń $\text{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 5, 2, 7), (1, 3, 1, 4))$ układem równań liniowych.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_1 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Więc rozwiązaniem ogólnym jest $(-c - d, -d, c, d)$, czyli bazą podprzestrzeni rozwiązań jest $(-1, 0, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)$. To oznacza, że wskazaną podprzestrzeń opisuje układ równań:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$