

# Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021

## ćwiczenia 15. – rozwiązania

23 kwietnia 2021

1. Niech  $A = (1, 2, 3)$  oraz  $B = (2, -1, 0)$ . Podziel odcinek  $AB$  na trzy równe części. Jaka jest długość każdego z tych odcinków?

Mamy  $\vec{AB} = (1, -3, -3)$ . Długość całości to  $\sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ , więc każda część będzie mieć długość  $\sqrt{19}/3$ .

Zatem na trzy części dzielą ten odcinek punkty

$$C = A + \frac{1}{3}\vec{AB} = (1, 2, 3) + \frac{(1, -3, -3)}{3} = (4/3, 1, 2)$$

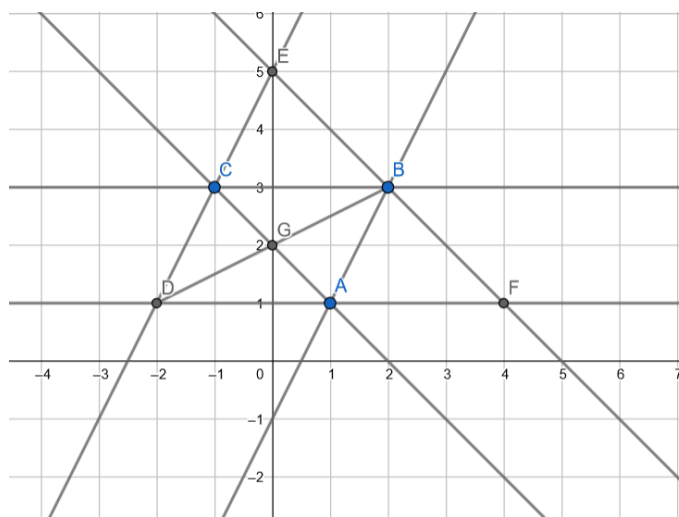
$$D = A + \frac{2}{3}\vec{AB} = (1, 2, 3) + \frac{2(1, -3, -3)}{3} = (5/3, 0, 1)$$

2. Dla jakich  $s \in \mathbb{R}$  punkty  $A = (1, 2)$ ,  $B = (2, 5)$  oraz  $C = (4, s)$  leżą na jednej prostej?

Ta prosta (nie jest pionowa), więc spełnia równanie  $y = ax + b$ . Zatem  $2 = a + b$  oraz  $5 = 2a + b$ , co daje rozwiązanie  $a = 3$ ,  $b = -1$ . Zatem  $s = 12 - 1 = 11$ .

3. Niech  $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 3)$ ,  $C = (-1, 3)$ . Ile jest punktów  $D$ , takich że  $A, B, C, D$  są wierzchołkami równoległoboku (niekoniecznie kolejnymi). Dla jednego z tych równoległoboków znaleźć punkt przecięcia przekątnych.

Poniższy rysunek powinien być wystarczającym szkicem rozwiązania



4. Rozstrzygnij, czy dany zbiór jest podprzestrzenią przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ :

a)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$  w  $V = \mathbb{R}^2$ ,

Tak, jeśli  $(x, y) \in X$ , to  $y = -x$ , zatem mając dwa wektory  $(x_1, -x_1)$ ,  $(x_2, -x_2)$  oraz liczbę  $a \in \mathbb{R}$ , mamy  $(x_1, -x_1) + (x_2, -x_2) = (x_1 + x_2, -(x_1 + x_2)) \in X$  oraz  $a(x_1, -x_1) = (ax_1, -ax_1) \in X$ .

b)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$  w  $V = \mathbb{R}^2$ ,

Nie, bo  $(1, 0) \in X$ , ale  $2(1, 0) = (2, 0) \notin X$ ,

c)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: xy = 0\}$  w  $V = \mathbb{R}^2$ .

Nie, bo  $(1, 0), (0, 1) \in X$ , ale  $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin X$ .

5. Rozstrzygnij, czy dany zbiór jest podprzestrzenią przestrzeni  $F(\mathbb{R})$ :

a)  $X = \{x \in F(\mathbb{R}): x' = e^{t^2}x\}$ ,

Tak, bo jeśli  $x_1, x_2 \in X$  i  $a \in \mathbb{R}$ , to  $(x_1 + x_2)' = e^{t^2}x_1 + e^{t^2}x_2 = e^{t^2}(x_1 + x_2)$  oraz  $(ax_1)' = ae^{t^2}x_1$ , więc  $ax_1$  oraz  $x_1 + x_2$  są w  $X$ .

b)  $X = \{x \in F(\mathbb{R}): x' = x + 1\}$ .

Nie, bo np.  $x(t) = -1$ , to  $x \in X$ , ale dla  $2x(t) = -2$  mamy  $(2x)' = 0 \neq -1 = 2x(t) + 1$ , więc  $2x \notin X$ .

6. Niech  $\alpha = (1, 1, 1)$  oraz  $\beta = (2, 3, 5)$ .

a) Czy wektor  $\gamma = (5, 2, 6)$  jest kombinacją liniową  $\alpha$  i  $\beta$ .

Nie, bowiem układ

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 \end{array} \right]$$

jest sprzeczny.

b) Znajdź  $s \in \mathbb{R}$  takie, że  $\delta = (4, 5, s)$  jest kombinacją liniową  $\alpha$  i  $\beta$ .

Układ

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & s \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s-7 \end{array} \right]$$

nie jest sprzeczny, gdy  $s = 7$ , zatem  $(4, 5, 7)$  jest szukanym wektorem.

c) Opisz równaniem zbiór wszystkich wektorów  $(x, y, z)$  będących kombinacją  $\alpha$  i  $\beta$ .

Zauważ, że takie równanie ma postać  $ax + by + cz = 0$ , i zarówno  $\alpha$  jak i  $\beta$  jest jego rozwiązaniem, zatem

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + 5c = 0 \end{cases},$$

jest układem równań, który opisuje te szukane współczynniki oraz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

zatem  $a = 2c$  oraz  $b = -3c$ , wstawiając  $c = 1$  mamy  $a = 2$  i  $b = -3$ , zatem szukane równanie to

$$2x - 3y + z = 0.$$

7. Czy dany układ wektorów jest liniowo niezależny?

a)  $\{(3, -2, 1), (-1, 0, 2), (4, 2, 2)\}$ ,

Mamy:

$$\left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 17 \end{array} \right]$$

i ponieważ w tej macierzy nie ma wiersza zerowego, ten układ jest liniowo niezależny.

b)  $\{(2, 6, -6, -3), (5, 9, -3, 3), (1, 1, 1, 2)\}$ .

Zastosujmy tym razem drugą z metod, sprawdzając, czy jednorodny układ jest oznaczony.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1, w_4 - 2w_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 2w_2, w_4 + 7w_2/4} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

W trzeciej kolumnie nie ma schodka, układ jest nieoznaczony, więc wektory nie są liniowo niezależne.

c)  $\{(4, 2, 1, -2, 3), (5, 0, -1, 6, 1), (1, 1, 2, 2, 0)\}$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdot \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 37 & -13 \end{bmatrix}$$

i ponieważ w tej macierzy nie ma wiersza zerowego, ten układ jest liniowo niezależny.