

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021

ćwiczenia 14. – rozwiązania

19 kwietnia 2021

1. Zenobi za pączek, 2 butelki wody i ciastko zapłacił 4,5 PLN, zaś Zdzisław, który kupił 2 pączki, 5 butelek wody i 3 ciastka wydał 11 PLN. Czy z tego można wywnioskować ile w tym samym sklepie musiał zapłacić Zbigniew za 2 pączki, 6 butelek wody i 4 ciastka?

Można wywnioskować, tylko jeśli zakupy Zbigniewa to suma a razy zakupy Zenobiego plus b razy zakupy Zdzisława dla pewnych liczb rzeczywistych a, b . Rozpisując to zdanie na 3 zdania dotyczące pączków, wody i ciastek odpowiednio otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a + 5b = 6 \\ a + 3b = 4 \end{cases}$$

I takie a, b istnieją, jeśli ten układ jest niesprzeczny. Łatwa sprawdzić, że jest niesprzeczny, bo ma jedno rozwiązanie: $a = -2, b = 2$, czyli umiemy wywnioskować. Zbigniew zapłacił $-2 \cdot 4,5 + 2 \cdot 11 = -9 + 22 = 13$ PLN.

2. Dla poniższych podzbiorów w $\mathbb{R}^2$ sprawdzić, czy spełnia on oba warunki z definicji podprzestrzeni.

- $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$,
- $\{(x, y) : |x| - |y| = 1\}$.

W pierwszym przykładzie spełnia warunek z dodawaniem ($(x, y) + (z, w) = (x+z, y+w)$ i $x+z, y+w \in \mathbb{Z}$), ale nie spełnia warunku z mnożeniem, np. $(1, 0)$ jest elementem tego zbioru, ale $\frac{1}{2}(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ już nie.

W drugim przykładzie nie spełnia warunku z dodawaniem, bo $(1, 0), (-1, 0)$ są w tym zbiorze, ale $(1, 0) + (-1, 0) = (0, 0)$ już nie oraz nie spełnia z mnożeniem, bo $(1, 0)$ są w zbiorze, ale już $\frac{1}{2}(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ nie.

3. Czy wektor $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów $(1, 2, 4, 3), (0, 1, 3, 3), (1, 2, 1, 5)$?

Czyli, czy układ:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ 2a + b + 2c = 1 \\ 4a + 3b + c = 1 \\ 3a + 3b + 5c = 1 \end{cases}$$

jest niesprzeczny. Zobaczmy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 4w_1, w_4 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 3w_2, w_4 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{-1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 - 2w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

co oznacza sprzeczność. Więc ten wektor nie jest kombinacją podanych wektorów.

4. Czy układ $(1, 2, -1, 2), (1, 4, 2, 8), (-1, 0, 4, 4)$ jest liniowo niezależny?

Sprawdzamy, czy w wyniku sprowadzania macierzy do postaci schodkowej powstanie wiersz zerowy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli wiersz zerowy powstał, a zatem układ nie jest liniowo niezależny.

5. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ wektor $(r, 8, 6)$ jest kombinacją liniową wektorów $(3, 4, 5), (1, 4, 4), (7, 4, 7)$?

Zapiszmy wektory w kolejności $(1, 4, 4), (3, 4, 5), (7, 4, 7)$, żeby było wygodniej liczyć i sprawdźmy.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & r \\ 4 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 4w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & r \\ 0 & -8 & -24 & 8 - 4r \\ 0 & -7 & -21 & 6 - 4r \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{8}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & r \\ 0 & 1 & 3 & -1 + \frac{r}{2} \\ 0 & -7 & -21 & 6 - 4r \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_3 + 7w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & r \\ 0 & 1 & 3 & -1 + \frac{r}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \frac{r}{2} \end{bmatrix}$$

Co oznacza, że układ jest niesprzeczny (czyli wektor jest kombinacją liniową) tylko, jeśli $-1 - \frac{r}{2} = 0$, czyli $r = -2$.

6. Dla jakich wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ wektory $(5, 7, s, 2), (1, 3, 2, 1), (2, 2, 4, t)$ tworzą układ liniowo niezależny?

Sprawdźmy:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & s & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & s & 2 \\ 2 & 2 & 4 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 5w_1, w_3 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & s - 10 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & t - 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & t - 2 \\ 0 & -8 & s - 10 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & t - 2 \\ 0 & 0 & s - 10 & 1 - 2t \end{bmatrix}$$

Więc na to, żeby ostatni wiersz nie był zerowy wystarczy, by $s \neq 10$ lub $t \neq \frac{1}{2}$ i jeśli spełniony jest choć jeden z tych warunków, układ jest niezależny.

7. Niech $W = \text{lin}((2, 1, 4), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 6))$. Podać taki układ wektorów liniowo niezależnych $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Sprowadzamy macierz do postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 13 \\ 7 & 7 & 7 \\ -4 & -9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot 2, w_3 \cdot 2, w_4 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 10 & -2 \\ 6 & -4 & 16 \\ 14 & 14 & 14 \\ -4 & -9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 7w_1, w_5 + 4w_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{7}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 7w_2, w_4 - 7w_2, w_5 + 7w_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli szukanymi wektorami są na przykład: $(2, 1, 4), (0, 1, -2)$.