

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 13. – rozwiązania

16 kwietnia 2021

1. Posługując się wzorami Cramera rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

zatem układ jest oznaczony oraz

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-8}{2} = -4,$$

oraz

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

2. Wykazać, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ układ równań

$$\begin{cases} 13x + 8y = a \\ 8x + 5y = b \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, które jest całkowite. Czy odpowiedź się zmieni jeśli zamienimy $13x$ na $14x$?

Mamy

$$\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 65 - 64 = 1 \neq 0,$$

zatem układ jest zawsze oznaczony, co więcej jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, to

$$x = \frac{5a - 8b}{1} \in \mathbb{Z}$$

oraz

$$y = \frac{-8a + 13b}{1} \in \mathbb{Z}.$$

Tymczasem

$$\begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 70 - 64 = 6 \neq 0$$

Układ jest nadal oznaczony, ale tym razem

$$x = \frac{5a - 8b}{6},$$

co już nie musi być liczbą całkowitą, np. dla $a = 1, b = 0$ nie jest.

3. Korzystając ze wzorów Cramera rozważyć, czy następujące układy równań są oznaczone lub sprzeczne. Jeśli układ jest oznaczony, podać rozwiązanie.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

W pierwszym przypadku: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13$, czyli układ jest oznaczony.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

Czyli $x = \frac{-13}{13} = -1$, $y = \frac{26}{13} = 2$ oraz $z = \frac{39}{13} = 3$.

W drugim układzie: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ oraz $\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, więc układ jest sprzeczny.

4. Używając twierdzenia Cramera określ dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ (-6 + t)x + 4y + 2z = s + 5 \\ 7x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Nadal używając twierdzenia Cramera znajdź to rozwiązanie dla $t = 2$ i $s = 1$ oraz wykaż, że układ jest sprzeczny dla $s = 0$, o ile nie jest oznaczony.

Widzimy, że

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 + t & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 42 + 4(-6 + t) - 28 - 16 - 3(-6 + t) = t,$$

a więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $t \neq 0$. Dla $t = 2, s = 1$ mamy:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-12}{2} = -6,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{34}{2} = 17.$$

Tymczasem dla $t = 0$ i $s = 0$, wiemy, że macierz współczynników przy zmiennych ma zerowy wyznacznik, ale, gdy pierwsza kolumna to kolumna wyrazów wolnych, to dostajemy

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 20 - 8 - 15 = 1 \neq 0,$$

co dowodzi, że układ jest wtedy sprzeczny.

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższych układów równań.

a)

$$\begin{cases} 3a + 2b + c + 4d + 3e = 1 \\ 5a + 8b + 2c + 5d + 8e = 4 \\ 4a - 2b + c + 7d + e = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 5x + 2y + 8z = 1 \\ 6x - 3y - 4z = 4 \\ 7x + 4y + 9z = 6 \\ 4x - 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

No to po kolei:

a) Korzystam z tego, że kolumny mogę napisać w dowolnej, ale ustalonej kolejności i zapiszę w kolejności zmiennych: c, a, b, d, e :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 5 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

czyli ten układ jest sprzeczny.

b) Korzystam z tego, że kolumny mogę napisać w dowolnej, ale ustalonej kolejności i zapiszę w kolejności zmiennych: y, x, z :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ -3 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & 9 & 6 \\ -5 & 4 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot 2, w_4 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ -6 & 12 & -8 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 6 \\ -10 & 8 & -8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 + 5w_1} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 27 & 16 & 11 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 33 & 32 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 27 & 16 & 11 \\ 0 & 33 & 32 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 9w_2, w_4 + 11w_2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -47 & 47 \\ 0 & 0 & -45 & 45 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{-1}{47}, w_4 \cdot \frac{-1}{45}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - w_3}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 8w_3, w_2 + 7w_3} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{3}} \\
& \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 5w_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Czyli ten układ ma tylko jedno rozwiązanie: $y = 2, x = 1, z = -1$, czyli $(1, 2, -1)$.