

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 12. – rozwiązania

12 kwietnia 2021

1. Znajdź wyznaczniki macierzy:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 20 - 24 - 0 - 10 - 12 = -26.$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwijamy względem drugiego wiersza i mamy:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 = (0 + 1 + 12 - 9 - 2 - 0) - (0 + 0 + 2 - 3 - 0 - 0) = 2 + 1 = 3.$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2 & * & * & * & * \\ 0 & 3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 5 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 7 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $*$ oznacza dowolną liczbę (wynik od niej nie zależy).

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 = 210.$$

2. Dla jakich wartości $r \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\det \begin{bmatrix} 1 & r & 1 & 0 \\ 0 & 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Z rozwinięcia Laplace'a względem trzeciego wiersza mamy:

$$\begin{vmatrix} 1 & r & 1 & 0 \\ 0 & 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} r & 1 & 0 \\ 1 & r & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & r & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = (r^2 + 0 + 0 - 0 - r - 1) - (r + 0 + 0 - 0 - 1 - 0) = r^2 - r - 1 - r + 1 = r^2 - 2r.$$

Czyli pytanie jest dla jakich $r \in \mathbb{R}$, $r^2 - 2r = 1$, czyli $r^2 - 2r - 1 = 0$. Zatem $(r - 1)^2 = 2$, a więc $r = 1 \pm \sqrt{2}$.

3. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix},$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix},$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$

Po kolei:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - (-2) = -3,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

bowiem $w_3 = w_2 - w_1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+4} =$$

$$= -3 \cdot (-13) + (-9) = 30.$$

4. Obliczyć wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 8 & 7 & 10 & 18 \end{bmatrix}$, sprowadzając je do postaci trójkątnej.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 8 & 7 & 10 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 10 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 10 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 4w_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & -14 & 4 \\ 0 & -5 & -14 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 - 5w_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 2w_3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Czyli wyznacznik macierzy na końcu to $2 \cdot (-1) \cdot (-8) \cdot (-9) = -144$, raz zamieniliśmy wiersze i jeden z nich pomnożyliśmy przez dwa, więc wynik trzeba pomnożyć przez (-1) i $\frac{1}{2}$, co daje $-144 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} = 72$.