

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej,
2020/2021
spotkanie 15. O liczbach

24 luty 2021

Rozważmy teraz aksjomaty (czyli podstawowe zasady, z których wynika każda inna) arytmetyki na liczbach naturalnych. Te aksjomaty sformułował Peano i są one następujące (opisują 0, operacje $+$ oraz $\cdot$ i operację nast , którą należy rozumieć jako $+1$, używają także stałej 0):

1. dla każdego n , nie jest prawdą, że $\text{nast}(n) = 0$,
2. dla każdych n, m , jeśli $\text{nast}(n) = \text{nast}(m)$, to $n = m$,
3. dla każdego n , $n + 0 = n$,
4. dla każdych n, m , $\text{nast}(n + m) = n + \text{nast}(m)$,
5. dla każdego n , $n \cdot 0 = 0$,
6. dla każdych n, m , $n \cdot \text{nast}(m) = n \cdot m + n$

I jest jeszcze jeden kluczowy aksjomat (tak naprawdę „schemat aksjomatów”) zwany indukcją matematyczną, który poznaliście przed chwilą.

Inaczej mówiąc do naszego zbioru aksjomatów dodajemy dla każdej własności $\varphi(n)$ następujący aksjomat:

7. Jeśli $\varphi(0)$ oraz dla każdego k , z tego że $\varphi(k)$ wynika, że $\varphi(\text{nast}(k))$, to dla każdego n , zachodzi $\varphi(n)$.

Spróbujmy zatem pokazać jakiś prosty fakt dotyczący arytmetyki, korzystając tylko i wyłącznie z aksjomatów Peano. Na przykład udowodnijmy, że dla każdej liczby naturalnej n , $n = 0 + n$ (zauważcie, że to nie to samo, co aksjomat trzeci, bo przecież nie udowodniliśmy, że dodawanie jest przemienne!).

Skorzystamy z indukcji matematycznej:

- teza dla $n = 0$ brzmi $0 = 0 + 0$ i jest prawdziwa na podstawie aksjomatu trzeciego.
- udowodnijmy teraz, że z tego, że zachodzi $k = 0 + k$ wynika, że zachodzi $\text{nast}(k) = 0 + \text{nast}(k)$. Załóżmy zatem, że dla pewnego k , mamy $k = 0 + k$. Wtedy $\text{nast}(k) = \text{nast}(0 + k)$, co z aksjomatu czwartego jest równe $0 + \text{nast}(k)$, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

I na mocy aksjomatu indukcji kończy dowód tego, że dla każdej liczby naturalnej n , $n = 0 + n$.

1. Udowodnij, korzystając tylko z aksjomatów Peano, że dla każdych liczb naturalnych m, n , mamy $\text{nast}(m) + n = \text{nast}(m + n)$.

Wskazówka: Niech m będzie ustaloną liczbą przez cały dowód. Rozpatrz przez indukcję tezę dla n , że $\text{nast}(m) + n = \text{nast}(m + n)$.

2. Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz dwóch do tej pory udowodnionych faktów, że dodawanie liczb naturalnych jest przemienne.
3. Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano, że dodawanie liczb naturalnych jest łączne (dla każdych liczb naturalnych p, q, r , $p + (q + r) = (p + q) + r$).
4. Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz tezy udowodnionej w zadaniu 3 (łączność dodawania), że dodawanie liczb naturalnych jest rozdzielne względem mnożenia (dla każdych liczb naturalnych p, q, r , $(p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r))$).

5. Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz przemienności dodawania, którą udowodniliśmy w zadaniu 8, oraz łączności dodawania (patrz zadanie 9), że mnożenie liczb naturalnych jest przemienne (dla każdych liczb naturalnych n, m , $(m \cdot n = n \cdot m)$).

Wskazówka: Postępuj podobnie jak przy dowodzeniu przemienności dodawania – zanim zabierzesz się za właściwy dowód udowodnij dla mnożenia fakty podobne do tych, które dla dodawania zostały udowodnione.

6. Wykonaj działania (w drugim przypadku warto skorzystać z modułów i argumentów!):

$$\frac{(3+i)^2}{(1+2i)^2} - \frac{(1-2i)^3}{(1+i)^3}$$

$$\frac{i^3(1-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}-i)^8}$$

Widać od razu, że dodawania liczb zespolonych od strony geometrycznej, to po prostu dodawanie wektorów na płaszczyźnie zespolonej.

Ale dużo bardziej ciekawe jest mnożenie i z pomocą przychodzi tu postać biegunowa. Mianowicie okazuje się, że mnożenie dwóch liczb zespolonych przez siebie powoduje przemnożenie ich modułów i dodanie ich argumentów. Ten fakt jest wyjątkowo przydatny przy liczeniu potęg liczb zespolonych – i stąd bierze się tzw. wzór de Moivre’a:

$$z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z).$$

Zastosujmy tę wiedzę do jakiegoś przykładu, np. policzmy $(1+i)^6(\sqrt{3}-i)$. Mamy:

- $1+i$ ma moduł $\sqrt{2}$ i argument $\frac{\pi}{4}$, a zatem $(1+i)^6$ ma moduł 8 i argument $\frac{6\pi}{4}$, czyli inaczej $\frac{-\pi}{2}$.
- $\sqrt{3}-i$ ma moduł 2 i argument $\frac{-\pi}{6}$, a zatem $(1+i)^6(\sqrt{3}-i)$ ma moduł 16 i argument $-\frac{2\pi}{3}$.

Liczb zespolonych można w związku z tym z powodzeniem użyć do rozwiązania zadań geometrycznych:

7. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$ (zadanie pochodzi z LII OM).

Wskazówka: Należy przeprowadzić dowód „nie wprost”.

8. Zauważ, że dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ mamy zawsze n liczb x takich, że $x^n = z$. Rzeczywiście pierwsza z nich powstaje poprzez policzenie pierwiastka z modułu $\sqrt[n]{|z|}$ oraz podzielenia argumentu przez n . Ale jeśli do takiego argumentu dorzucę jeszcze dowolną wielokrotność liczby $\frac{2\pi}{n}$, to po podniesieniu do potęgi n dostanę to samo, bo dodatkowy kąt zsumuje się do wielokrotności 2π . Wszystkie te liczby będziemy nazywać pierwiastkami. Znajdź wszystkie $\sqrt[4]{-16}$.

9. Dane są punkty B i C . Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą AB . Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C (zadanie pochodzi z artykułu z „Deltę” autorstwa J. Jaszuńskiej).

Wskazówka: Umieść tę sytuację na płaszczyźnie zespolonej.

10. Udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ następujące warunki są równoważne:

- $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$
- dla dowolnych x, Z , jeśli $x \in Z$ i $Z \in \mathcal{A}$, to $x \in \mathcal{A}$
- dla dowolnego Z , jeśli $Z \in \mathcal{A}$, to $Z \subseteq \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$