

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 37. – rozwiązania

25. stycznia 2021

1. Oblicz:

a) $\int \sin^2 x \, dx$,

Przez części:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x + C - \int \sin^2 x,\end{aligned}$$

zatem przenosząc na lewą stronę i dzieląc przez 2

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + D.$$

b) $\int x \sin x \, dx$,

Wskazówka: przez części dla $f' = \sin x$ oraz $g = x$.

c) $\int x \arctg x \, dx$,

Liczymy przez części dla $f' = x$ oraz $g = \arctg x$. Wtedy $f = \frac{x^2}{2}$ oraz $g' = \frac{1}{1+x^2}$, zatem

$$\begin{aligned}\int x \arctg x \, dx &= \frac{x^2 \arctg x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2 \arctg x}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx = \\ &= \frac{x^2 \arctg x}{2} - \frac{x - \arctg x}{2} \, dx + C = \frac{(x^2 + 1) \arctg x - x}{2} + C.\end{aligned}$$

d) $\int x \sin x^2 \, dx$,

Wskazówka: podstaw $t = x^2$.

e) $\int \sin^3 x \, dx$,

Wskazówka: $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$. Następnie podstaw $t = \cos x$.

f) $\int \frac{dx}{\sin x}$,

Uniwersalne podstawienie trygonometryczne, to $t = \tg \frac{x}{2}$. Wtedy $\frac{dt}{dx} = \frac{1+\tg^2 \frac{x}{2}}{2} = \frac{1+t^2}{2}$ oraz $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ i $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Stosując to podstawienie tutaj, mamy:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| + C = \ln |\tg x/2| + C.$$

g) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$,

Wskazówka: przetestuj podstawienie $t = \sin x + \cos x$.

h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$,

Stosujemy podstawienie $t = x^2$. Wtedy $\frac{dt}{dx} = 2x$ oraz

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \frac{\arcsin t}{2} + C = \frac{\arcsin x^2}{2} + C.$$

i) $\int \frac{e^x}{e^x + 2} dx,$

Wskazówka: podstaw $t = e^x$.

j) $\int \frac{dx}{x^2 - 5},$

Wskazówka: $x^2 - 5 = (x - 5)(x + 5)$, więc ten ułamek rozkłada się na dwa ułamki proste.

k) $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1},$

Wskazówka: mianownik nie ma pierwiastków, więc trzeba skorzystać z podstawienia $t = \frac{x+p/2}{\sqrt{-\Delta/4}} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Wtedy $x^2 + px + q = -\frac{\Delta}{4}(1 + t^2) = -\frac{3}{4}(1 + t^2)$ oraz $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta/4}} = \frac{2}{3}$.

l) $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx.$

Wskazówka: mamy:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x + 2}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 2}{(x + 1)(x - 1)}$$

i ułamek rozkłada się na dwa ułamki proste.