Matematyka 0 WCh, 2020/2021
ćwiczenia 35. i 36. – rozwiązania

19 i 22 stycznia 2021

1. Oblicz:

   a) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$,
   Podstawiamy $t = \sqrt{x}$, zatem $x = t^2$ oraz $dx = 2t\,dt$. Potem przez części
   $$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt = 2(te^t - \int e^t\,dt) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

   b) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.
   Podstawiamy $t = \sqrt[6]{x}$, więc $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} = \frac{1}{6t^5}$
   $$\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^6}{1+t^2}\,dt = 6\int (t^4 - t^2 + 1)\,dt - \int \frac{6\,dt}{1+t^2} =$$
   $$= 6t^5/5 - 2t^3 + 6t - 6\text{arctg}t + C = 6\sqrt[6]{x^5}/5 - 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\text{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

2. Oblicz:

   a) $\int \frac{2\,dx}{(x-4)^4}$,
   $$\int \frac{2\,dx}{(x-4)^4} \overset{\boxed{t = x-4,\ \frac{dt}{dx} = 1}}{=} \int \frac{2\,dt}{t^4} = \frac{-2}{3t^3} + C = \frac{-2}{3(x-4)^3} + C.$$

   b) $\int \frac{dx}{x^4+x}$,
   Rozkładamy mianownik na czynniki: $(x^4 + x) = x(x+1)(x^2-x+1)$ i wyliczamy rozkład na ułamki proste:
   $$\frac{1}{x^4+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$
   a zatem:
   $$1 = A(x+1)(x^2-x+1) + Bx(x^2-x+1) + (Cx+D)x(x+1) =$$
   $$= A(x^3+1) + B(x^3-x^2+x) + C(x^3+x^2) + D(x^2+x),$$
   czyli:
   $$\begin{cases} A = 1 \\ B + D = 0 \\ -B + C + D = 0 \\ A + B + C = 0 \end{cases}.$$
   Czyli: $A = 1, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}, D = \frac{1}{3}$, a więc:
   $$\int \frac{dx}{x^4+x} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} \overset{\boxed{t = x^2-x+1,\ \frac{dt}{dx} = 2x-1}}{=}$$
   $$= \ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|t| + C = \ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) + C.$$

c) $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$,

x^2+2x+4 nie ma żadnych pierwiastków, więc mamy do czynienia już z ułamkiem prostym. Więc:

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+4)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2x+4)^2}\,dx.$$

Pierwsza z tych całek to proste podstawienie, a więc:

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+4)^2}\,dx \overset{\boxed{t=x^2+2x+4,\ \frac{dt}{dx}=2x+2}}{=} \frac{-1}{x^2+2x+4}+C.$$

Z drugą całką jest więcej kłopotu, bo potrzebne jest wymyślne podstawienie $t=\frac{x+p/2}{\sqrt{-\Delta/4}}$, a w naszym wypadku $\Delta = 4-16 = -12$ oraz $p=2$, czyli $t=\frac{x+1}{\sqrt{3}}$ i $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Czyli:

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+4)^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{3}\,dt}{9(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{9}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2},$$

i korzystamy z wzoru rekurencyjnego i dostajemy:

$$\frac{\sqrt{3}}{9}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{t}{1+t^2}+\int\frac{dt}{1+t^2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arctg} t\right)+C,$$

a więc ostatecznie:

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+2x+4}+\frac{1}{6}\frac{x+1}{x^2+2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{18}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

d) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx$

Mamy:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1-5x+1}{x(x^2+2x+1)}\,dx = \int\frac{dx}{x} - \int \frac{5x-1}{x(x^2+2x+1)}\,dx.$$

O ile z pierwszą całką nie ma kłopotu, bo, to trzeba drugą rozłożyć na ułamki proste:

$$\frac{5x-1}{x(x^2+2x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+1}.$$

A więc:

$$\begin{cases} A=-1 \\ 2A+C=5 \\ A+B=0 \end{cases},$$

a zatem $A=-1, B=1, C=7$ i:

$$\int \frac{5x-1}{x(x^2+2x+1)}\,dx = -\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x+7}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx + 6\int\frac{dx}{(x+1)^2} = -\ln|x| + \frac{\ln(x^2+2x+1)}{2} - \frac{6}{1+x} + C.$$

Zatem ostatecznie:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx = \frac{\ln(x^2+2x+1)}{2} - \frac{6}{1+x} + C.$$

e) $\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx$,

Mamy: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, a zatem:

$$\frac{3x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

czyli:

$$\begin{cases} A-C=0 \\ A-B+C=3 \\ A+B=0 \end{cases},$$

zatem: $A=1, B=-1, C=1$ i

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx=\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}=\ln|x-1|-\frac{\ln(x^2+x+1)}{2}+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1},$$

a w przypadku tej ostatniej całki potrzebujemy naszego podstawienia: $t=\frac{x+p/2}{\sqrt{-\Delta/4}}$, a w naszym wypadku $\Delta=1-4=-3$ oraz $p=1$, czyli $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ i $\frac{dt}{dx}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Czyli:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}=\int \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\,dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,$$

a zatem w końcu:

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{\ln(x^2+x+1)}{2}+\frac{3}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

3. Oblicz:

a) $\int \frac{x+\sqrt{2x-3}}{x-1}\,dx$.

$$\int \frac{x+\sqrt{2x-3}}{x-1}\,dx \overset{\boxed{t=\sqrt{2x-3},\, x=\frac{t^2+3}{2},\, \frac{dt}{dx}=1/\sqrt{2x-3}}}{=}$$

$$=\int \frac{t^3+2t^2+3t}{t^2+1}\,dt=\int\left(t+2+\frac{2t}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}+2t+\ln(t^2+1)-2\mathrm{arctg}t+C=$$

$$=\frac{2x-3}{2}+2\sqrt{2x-3}+\ln(2x-2)-2\mathrm{arctg}\sqrt{2x-3}+C.$$

b) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$,

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \overset{\boxed{t=e^x,\, \frac{dt}{dx}=e^x}}{=} \int \frac{dt}{t(t+t^{-1})}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\mathrm{arctg}t+C=\mathrm{arctg}e^x+C.$$

c) $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x} \overset{\boxed{t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},\, \frac{dt}{dx}=\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{2},\, \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}}{=} \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}(6t+1-t^2)}=$$

$$=\int \frac{2\,dt}{-t^2+6t+1}=\int \frac{dt}{t-3-\sqrt{10}}-\int \frac{dt}{t-3+\sqrt{10}}=\ln|t-3-\sqrt{10}|-\ln|t-3+\sqrt{10}|+C=$$

$$=\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-3-\sqrt{10}\right|-\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-3+\sqrt{10}\right|+C.$$