

# Matematyka 0 WCh, 2020/2021

## ćwiczenia 31. – rozwiązania

11 stycznia 2021

1. Ile rozwiązań ma równanie?

a)  $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ ,

Sprawdźmy znaki pochodnej  $3x^2 - 12x + 9$ . Jest równa zero dla  $x = 1$  i  $x = 3$ , zatem mamy:

- dla  $x < 1$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f$  rośnie
- dla  $x = 1$ ,  $f'(1) = 0$ ,  $f(1) = -7$ , i jest to lokalne maksimum, zatem  $f$  wciąż nie przekroczyła osi  $OX$ .
- dla  $x \in (1, 3)$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f$ , maleje
- dla  $x = 3$ ,  $f'(3) = 0$ , mamy lokalne minimum.
- dla  $x > 3$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f$  rośnie i to nieograniczenie, bo  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , więc na tym przedziale przecina oś  $OX$ .

A zatem jest tylko jedno rozwiązanie (i wiemy o nim, że jest  $> 3$ ).

b)  $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$ ,

Wskazówka: postępuj podobnie jak poprzednio.  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 12(x-1)^2(x+1)$ .

c)  $x^5 - 5x = a$ , w zależności od  $a$ .

Niech  $f(x) = x^5 - 5x$ ,  $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x+1)(x-1)(x^2+1)$ . zatem mamy:

- dla  $x < -1$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f$  rośnie (i  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ).
- dla  $x = -1$ ,  $f'(-1) = 0$ , mamy lokalne maksimum  $f(-1) = 4$ .
- dla  $x \in (-1, 1)$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f$ , maleje
- dla  $x = 1$ ,  $f'(1) = 0$ , mamy lokalne minimum,  $f(1) = -4$ .
- dla  $x > 1$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f$  rośnie i to nieograniczenie, bo  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Podsumowując dla  $a < -4$  jedno rozwiązanie, dla  $a = -4$  dwa rozwiązania, dla  $a \in (-4, 4)$  trzy rozwiązania, dla  $a = 4$  dwa rozwiązania i dla  $a > 4$ , jedno rozwiązanie.

d)  $e^x = ax^2$ , w zależności od  $a$ .

Jest jasne, że dla  $a \leq 0$ ,  $ax^2 \leq 0$ , podczas gdy  $e^x > 0$  dla każdego  $x$ , więc wtedy równanie nie ma rozwiązań.

Dla  $a > 0$  oraz  $x \leq 0$  mamy zawsze jedno rozwiązanie, ponieważ  $e_x$  rośnie od  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  do  $e^0 = 1$ , zaś  $ax^2$  maleje od  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^2 = \infty$  do  $a0^2 = 0$ .

W przedziale  $x > 0$  sprawa się trochę bardziej komplikuje. Wiadomo, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - ax^2) = 0$ , ale samo równanie może mieć 0, 1 lub 2 pierwiastki w zależności od tego jakie duże jest  $a$ . Poszukajmy takiego  $a$ , dla którego jest tylko jedno rozwiązanie. Wtedy w pewnym punkcie  $x$ , wykresy  $e^x$  oraz  $ax^2$  są styczne, zatem mają równe wartości  $e^x = ax^2$  oraz pochodne  $e^x = 2ax$ . Zatem  $x = 2$  oraz  $a = e^2/4$ . Mamy zatem dla  $a \in (0, e^2/4)$  zero rozwiązań dla  $x > 0$  (w sumie jedno dla  $x \in \mathbb{R}$ ), dla  $a = e^2/4$ , jedno dla  $x > 0$  (w sumie dwa) i dla  $a \in (e^2/4, \infty)$  mamy dwa rozwiązania dla  $x > 0$ , czyli w sumie jest ich 3.

2. Wykaż nierówności:

a)  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ , dla  $x > 0$ .

Dla  $x = 0$  mamy  $e^0 = 1$ ,  $1 + 0 + 0 = 0$ , natomiast pochodne to  $e^x$  oraz  $1 + x$ , i oczywiście dla  $x > 0$ ,  $e^x > 1 + x$ , bowiem  $e^0 = 1 + 0$ , a  $e^x > 1$ .

b)  $\sin x - \sin y > \frac{x-y}{2}$ , dla  $-\frac{\pi}{3} < y < x < \frac{\pi}{3}$ .

Z Twierdzenia Lagrange'a  $\frac{\sin x - \sin y}{x-y}$  jest równe wartości pochodnej  $(\sin x)' = \cos x$  w pewnym punkcie  $z \in [x, y]$ . Ale  $\cos z > \frac{1}{2}$  dla  $z \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ .

c)  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin x$ , dla  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ,

Rozważmy  $f(x) = \sin x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$ . Mamy  $f(0) = f(\pi/4) = 0$ . Pochodna to  $\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ , zaś druga pochodna to  $-\sin x < 0$  na danym przedziale. Zatem funkcja  $f$  jest wklęsła na tym przedziale, a więc na tym przedziale musi być większa od 0.

d)  $\ln x < -1 + \ln 10 + \frac{x}{10}$ , dla  $0 < x \neq 10$ .

Dla  $x = 10$  mamy  $\ln 10$  po obu stronach. Natomiast pochodne to odpowiednio  $1/x$  oraz  $\frac{1}{10}$ . Dla  $x < 10$ ,  $1/x > \frac{1}{10}$ , a zatem  $\ln x < -1 + \ln 10 + \frac{x}{10}$ , natomiast dla  $x > 10$ ,  $1/x < \frac{1}{10}$ , a zatem  $\ln x < -1 + \ln 10 + \frac{x}{10}$ .

3. Zbadaj przebieg funkcji  $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$  i narysuj jej wykres.

Wskazówka: zbadaj kolejno: dziedzinę i miejsca zerowe, ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziałów określoności, asymptoty, różniczkowalność, przedziały monotoniczności, ekstrema, drugą pochodną, wypukłość, punkty przegięcia, tabelę przebiegu zmienności funkcji, parzystość, nieparzystość, okresowość, szkic wykresu i przeciwdziedzinę.