

# Matematyka 0 WCh, 2020/2021

## ćwiczenia 30. – rozwiązania

8 stycznia 2021

Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

A.  $f(x) = x + e^{-x}$ ,

a) dziedzinę i miejsca zerowe

$D_f = \mathbb{R}$ ,  $x + e^{-x} = 0$  jeśli  $e^{-x} = -x$ , czyli  $e^x = x$ , co na pewno nie zachodzi dla ujemnych  $x$ , bo wtedy  $x < 0$ , a  $e^x > 0$ . Ale nie jest to też prawdą, dla  $x \geq 0$ , bo  $e^0 = 1 > 0$  oraz  $e^x$  rośnie szybciej niż  $x$ , bo  $(e^x)' = e^x > 1 = (x)'$ . Zatem  $f$  nie ma miejsc zerowych.

b) ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziałów określoności

Funkcja jest ciągła, jako suma funkcji ciągłych.

c) asymptoty

Ponieważ funkcja jest ciągła, nie ma asymptot pionowych. Sprawdzamy asymptoty poziome:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + e^{-x} = \infty,$$

bo  $x \rightarrow \infty$  oraz  $e^{-x} \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{e^x}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = \infty,$$

a zatem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \infty.$$

Zatem nie ma asymptot poziomych. Sprawdzamy ukośne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0.$$

A zatem  $y = x$  jest prawostronną asymptotą ukośną.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{e^{-x}}{-x} = -\infty,$$

bowiem  $e^{-x} \rightarrow \infty$  oraz  $-x \rightarrow \infty$ , czyli z reguły de l'Hospitala mamy j.w.

d) różniczkowalność

Funkcja jest różniczkowalna na całej prostej, i:

$$f'(x) = 1 - e^{-x}.$$

e) przedziały monotoniczności, ekstrema

$1 - e^{-x} = 0$  o ile  $e^{-x} = 1$ , czyli gdy  $x = 0$ . A zatem:

- $(-\infty, 0)$  mamy  $f'(x) < 0$ , a więc  $f$  maleje,
- $(0, \infty)$  mamy  $f'(x) > 0$ , a więc  $f$  rośnie

A zatem w punkcie  $x = 0$  funkcja osiąga swoje minimum.

f) druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia

$f''(x) = e^{-x}$ , jest zawsze dodatnia, więc funkcja jest wypukła i nie ma punktów przegięcia.

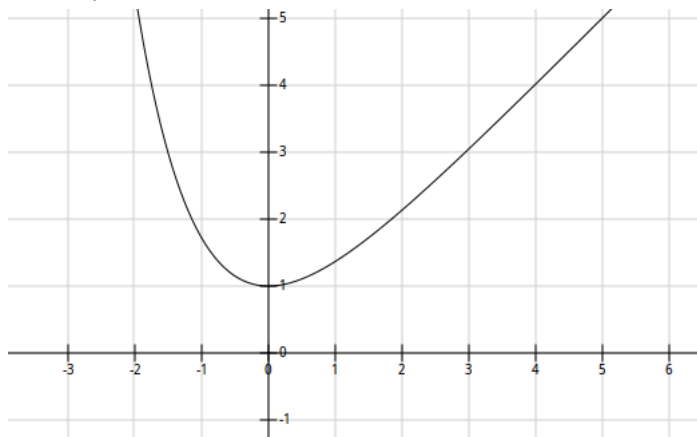
g) tabela przebiegu zmienności funkcji

|                | $f'$  | $f''$ | $f$               |
|----------------|-------|-------|-------------------|
| $(-\infty, 0)$ | $< 0$ | $> 0$ | malejąca, wypukła |
| 0              | $= 0$ | $> 0$ | minimum           |
| $(0, \infty)$  | $> 0$ | $> 0$ | rosnąca, wypukła  |

h) parzystość, nieparzystość, okresowość

Funkcja nie jest parzysta, bo  $f(-1) = -1 + e \neq 1 + \frac{1}{e} = f(1)$ . Nie jest też nieparzysta, bo  $f(-1) = -1 + e \neq -(1 + \frac{1}{e}) = -f(1)$ . Oczywiście nie jest też okresowa.

i) szkic wykresu



j) przeciwdziedzina

Ponieważ  $f(0) = 1$  i jest to minimum, to  $R_f = (1, \infty)$ .

B.  $g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ ,

a) dziedzinę i miejsca zerowe

Mianownik  $1 - x^2 = 0$  jeśli  $x \in \{-1, 1\}$ . A zatem  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Ponadto  $g(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = 0$ .

b) ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziałów określoności

Funkcja jest ciągła na przedziałach  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  oraz  $(1, \infty)$ .

Mamy ponadto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$$

c) asymptoty

Zatem wiadomo, że mamy asymptoty pionowe obustronne  $x = -1$  i  $x = 1$ . Nie ma asymptot poziomych.

Sprawdzamy ukośne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x^2 - 1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x - x} = 0.$$

A zatem  $y = -x$  jest prawostronną asymptotą ukośną.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1/x^2 - 1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1/x - x} = 0.$$

A zatem  $y = -x$  jest wręcz obustronną asymptotą ukośną.

d) różniczkowalność

Funkcja jest różniczkowalna na całej prostej, i:

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) + 2x^4}{(1-x^2)^2} = -\frac{x^2(x^2-3)}{(1-x^2)^2}.$$

e) przedziały monotoniczności, ekstrema

$x^2(x^2-3) = 0$  o ile  $x = 0$  lub  $x = \pm\sqrt{3}$ . A zatem:

- $(-\infty, -\sqrt{3})$  mamy  $g'(x) < 0$ , a więc  $g$  maleje,
- $(-\sqrt{3}, -1)$  mamy  $g'(x) > 0$ , a więc  $g$  rośnie,
- $(-1, 0)$  mamy  $g'(x) > 0$ , a więc  $g$  rośnie,
- $(0, 1)$  mamy  $g'(x) > 0$ , a więc  $g$  rośnie,
- $(1, \sqrt{3})$  mamy  $g'(x) > 0$ , a więc  $g$  rośnie,
- $(\sqrt{3}, \infty)$  mamy  $g'(x) < 0$ , a więc  $g$  maleje.

A zatem w punkcie  $x = -\sqrt{3}$  funkcja osiąga swoje lokalne minimum, a w punkcie  $x = \sqrt{3}$  osiąga lokalne maksimum.

f) druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia

$$g''(x) = \left( \frac{x^2(x^2-3)}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3},$$

- $(-\infty, -1)$  mamy  $g''(x) > 0$ , a więc  $f$  wypukła,
- $(-1, 0)$  mamy  $g''(x) < 0$ , a więc  $f$  wklęsła,
- $(0, 1)$  mamy  $g''(x) > 0$ , a więc  $f$  wypukła,
- $(1, \infty)$  mamy  $g''(x) < 0$ , a więc  $f$  wklęsła.

Zatem 0 to punkt przegięcia.

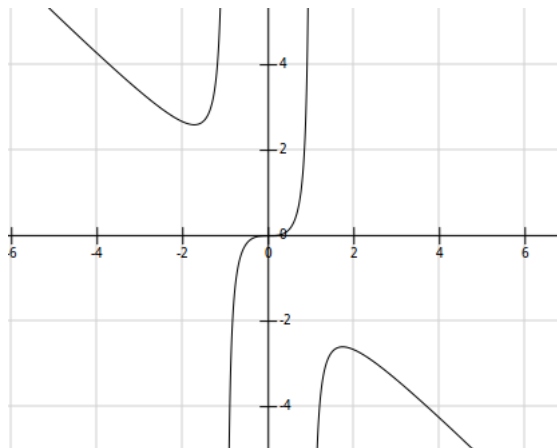
g) tabela przebiegu zmienności funkcji

|                        | $g'$  | $g''$ | $g$                          |
|------------------------|-------|-------|------------------------------|
| $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $< 0$ | $> 0$ | malejąca, wypukła            |
| $-\sqrt{3}$            | $= 0$ | $> 0$ | lokalne minimum              |
| $(-\sqrt{3}, -1)$      | $> 0$ | $> 0$ | rosnąca, wypukła             |
| $-1$                   | $-$   | $-$   | asymptota pionowa obustronna |
| $(-1, 0)$              | $> 0$ | $< 0$ | rosnąca, wklęsła             |
| $0$                    | $= 0$ | $= 0$ | punkt przegięcia             |
| $(0, 1)$               | $> 0$ | $> 0$ | rosnąca, wypukła             |
| $1$                    | $-$   | $-$   | asymptota pionowa obustronna |
| $(1, \sqrt{3})$        | $> 0$ | $< 0$ | rosnąca, wklęsła             |
| $\sqrt{3}$             | $= 0$ | $< 0$ | lokalne maksimum             |
| $(\sqrt{3}, \infty)$   | $< 0$ | $< 0$ | malejąca, wklęsła.           |

h) parzystość, nieparzystość, okresowość

Funkcja jest nieparzysta, bo  $f(-x) = \frac{-x^3}{(1-x^2)} = -f(x)$ . Zatem nie jest parzysta, bo nie jest stała równa zero. Oczywiście nie jest też okresowa.

i) szkic wykresu



j) przeciwdziedzina

Oczywiście  $R_g = \mathbb{R}$ .

C.  $h(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

a) dziedzinę i miejsca zerowe

$x \in D_h$ , jeśli  $x^2 + 1 > 0$ , czyli  $x^2 > -1$ , czyli  $D_h = \mathbb{R}$ .

Natomiast  $h(x) = 0$ , jeśli  $\ln(x^2 + 1) = 0$ , czyli  $x^2 + 1 = 1$ , czyli  $x = 0$

b) ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziałów określoności

Funkcja jest ciągła, jako złożenie funkcji ciągłych.

c) asymptoty

Ponieważ funkcja jest ciągła, nie ma asymptot pionowych. Sprawdzamy asymptoty poziome:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 1) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = \infty,$$

a zatem nie ma asymptot poziomych

Zatem nie ma asymptot poziomych. Sprawdzamy ukośne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + 1/x} = 0,$$

(skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala), ale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty.$$

A zatem nie ma asymptoty ukośnej prawostronnej. Analogicznie, nie ma asymptoty lewostronnej.

d) różniczkowalność

Funkcja jest różniczkowalna na całej prostej, i:

$$h'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

e) przedziały monotoniczności, ekstrema

$h'(x) = 0$ , gdy  $x = 0$ . A zatem:

- $(-\infty, 0)$  mamy  $h'(x) < 0$ , a więc  $f$  maleje,
- $(0, \infty)$  mamy  $h'(x) > 0$ , a więc  $f$  rośnie

A zatem w punkcie  $x = 0$  funkcja osiąga swoje minimum.

f) druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia

$$h''(x) = \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2},$$

zeruje się dla  $x = \pm 1$ . A zatem dla  $x < -1$ ,  $h''(x) < 0$  i funkcja jest wklęsła. Na  $(-1, 1)$ ,  $h''(x) > 0$ , funkcja jest wypukła i dla  $x > 1$  mamy  $h''(x) < 0$  i funkcja jest wklęsła. Zatem  $\pm 1$  to punkty przegięcia.

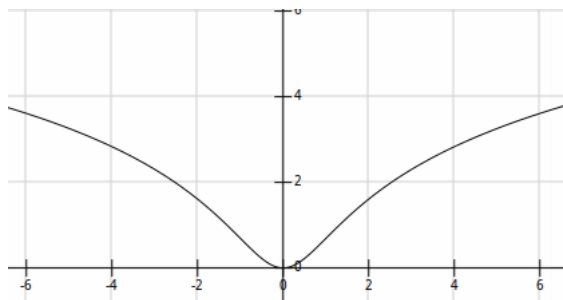
g) tabela przebiegu zmienności funkcji

|                 | $h'$  | $h''$ | $h$               |
|-----------------|-------|-------|-------------------|
| $(-\infty, -1)$ | $< 0$ | $< 0$ | malejąca, wklęsła |
| $-1$            | $< 0$ | $= 0$ | punkt przegięcia  |
| $(-1, 0)$       | $< 0$ | $> 0$ | malejąca, wypukła |
| $0$             | $= 0$ | $> 0$ | lokalne minimum   |
| $(0, 1)$        | $> 0$ | $> 0$ | rosnąca, wypukła  |
| $1$             | $> 0$ | $= 0$ | punkt przegięcia  |
| $(1, \infty)$   | $> 0$ | $< 0$ | rosnąca, wklęsła. |

h) parzystość, nieparzystość, okresowość

Funkcja jest parzysta, bo  $f(x) = \ln(x^2 + 1) = f(-x)$ , zatem skoro nie jest stała równa 0, nie jest nieparzysta. Oczywiście nie jest też okresowa.

i) szkic wykresu



j) przeciwdziedzina

Ponieważ granice w  $\pm\infty$  to  $\infty$ , a minimum to 0, mamy  $R_h = [0, \infty)$ .