

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 28. – rozwiązania

21 grudnia 2020

1. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{666} (0,5)^x$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{666} (0,5)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{666}}{2^x},$$

a więc licznik i mianownik dąży do nieskończoności, to stosujemy regułę de l'Hospitala. Widać, że proces ten trzeba powtórzyć 666 razy

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{666x^{665}}{2^x \cdot \ln 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{666 \cdot 665 \cdot x^{664}}{2^x (\ln 2)^2} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{666!}{2^x \cdot (\ln 2)^{666}} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$.

Licznik i mianownik dąży do $-\infty$, to stosujemy regułę de l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{\cos x / \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$$

bo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$.

Wskazówka: $x^{\sin x} = e^{\ln x \cdot \sin x}$, więc zbadaj granicę funkcji $\frac{\ln x}{1/\sin x}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \pi/2) \operatorname{tg} x$.

Wskazówka: $(x - \pi/2) \operatorname{tg} x = \frac{(x - \pi/2) \sin x}{\cos x}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Wskazówka: $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\ln(\sin x) \cdot \operatorname{tg} x}$, więc zbadaj granicę funkcji $\frac{\ln(\sin x)}{\cos x / \sin x}$.

2. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. Czy f jest funkcją stałą?

Wiemy już, że $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Zatem

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

Zatem $f'(x) = 0$. Funkcja f jednak nie jest stała, co zasadza się w tym, że 0 jest poza dziedziną tej funkcji. W szczególności, jeśli $x = \operatorname{tg} a > 0$ oraz $a \in (0, \pi/2)$, to $\frac{1}{x} = \operatorname{tg}(\pi/2 - a)$, zatem $f(x) = a + (\pi/2 - a) = \pi/2$. Natomiast jeśli $x = \operatorname{tg} a < 0$ oraz $a \in (\pi/2, \pi)$, to $\frac{1}{x} = \operatorname{tg}(\pi/2 - a)$, zatem $f(x) = a + (-\pi/2 - a) = -\pi/2$.

3. Jaki jest minimalny czas dojścia do domu stojącego przy prostoliniowej szosie w odległości 13 km od miejsca, w którym się znajdujemy, jeśli odległość od szosy wynosi 5 km. W terenie poruszamy się z prędkością 3 km/h, zaś po szosie z prędkością 5 km/h.

Zatem długość szosy to 12. Idziemy po prostej do szosy (w punkcie x) i potem szosą $12 - x$ km do domu (a więc $x \in [0, 12]$). Zatem czas przejścia to

$$t(x) = \sqrt{5^2 + x^2}/3 + (12 - x)/5,$$

zatem

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{5}$$

Co zeruje się dla $x = 15/4$. Ten punkt rzeczywiście odpowiada minimum, bo pochodna na odcinku $[0, 15/4]$ jest ujemna, a na odcinku $(15/4, 12]$ dodatnia. Zatem minimalny czas to

$$t(15/4) = 56/15.$$

4. Ciężarówka porusza się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 50 km/h, maksymalna 100 km/h, litr benzyny kosztuje 2 zł (bardzo stare ceny!), kierowca otrzymuje 10 zł za godzinę swej pracy. Ciężarówka zużywa $11 + \frac{v^2}{400}$ litrów paliwa w ciągu godziny jazdy z prędkością v . Przy jakiej prędkości koszt przejazdu ustalonego odcinka trasy jest najmniejszy?

Możemy policzyć cenę dla 1 km dla prędkości v . Ta cena to:

$$c(v) = \left(\left(11 + \frac{v^2}{400} \right) \cdot 2 + 10 \right) \frac{1}{v} = \frac{v}{200} + \frac{32}{v},$$

zatem

$$c'(v) = \frac{1}{200} - \frac{32}{v^2},$$

co zeruje się dla $v = 80$, i jest ujemne na przedziale $(0, 80)$ i dodatnie na przedziale $(80, \infty)$. Zatem dla $v = 80$ km/h mamy minimum ceny.

5. Czy spośród beczek w kształcie walca o pojemności jednego metra sześciennego istnieje beczka o najmniejszym polu powierzchni? Jeśli tak, to znaleźć jej wymiary. Czy istnieje beczka w kształcie walca, o pojemności jednego metra sześciennego, o średnicy mniejszej niż milimetr i polu powierzchni większym niż bilion kilometrów kwadratowych? Czy istnieje beczka w kształcie walca, o pojemności jednego metra sześciennego, o średnicy większej niż kilometr i polu powierzchni większym niż bilion kilometrów kwadratowych? Uwaga: beczka składa się z dna, powierzchni bocznej i pokrywy.

Objętość beczki to $V = \pi r^2 h = 1$, zatem $h = \frac{1}{\pi r^2}$, zaś jej pole powierzchni

$$S(r) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2,$$

oraz

$$S'(r) = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r$$

zeruje się dla $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, i na przedziale $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}})$ jest ujemna, a potem dodatnia, zatem w punkcie $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ funkcja $S(r)$ ma swoje minimum. Czyli tak, dla $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ oraz $h = \sqrt[3]{4/\pi}$.

Tak, $\lim_{r \rightarrow 0^+} S(r) = \infty$.

Tak, $\lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = \infty$.

6. Znaleźć maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

Wskazówka: Niech a to będzie odległość od środka sfery do podstawy stożka. Wtedy jego wysokość to $1 + a$, natomiast średnica jego podstawy to $\sqrt{1^2 - a^2}$, zatem

$$V(a) = \frac{1}{3} \pi (1 - a^2)(1 + a).$$

Po obliczeniu pochodnej i przyrównaniu do 0 dostajemy maksimum dla $a = 1/3$, zatem $V = \pi \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{32\pi}{81}$.