

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 26. – rozwiązania

14 grudnia 2020

1. Wyznacz równanie prostej stycznej do krzywej:

a) $y = x^4$, w punkcie $x = 1$,

$f'(x) = 4x^3$, $f'(1) = 4$, a zatem styczna to $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 1 = 4x - 3$.

b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ w punkcie $(1, \sqrt{2})$.

Zatem: $y^2 = 4 - x^2$, czyli $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Z tego, że $y = \sqrt{2}$ wnioskujemy, że chodzi o górną gałąź tej krzywej, czyli o wykres funkcji $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Zatem $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{4 - x^2}}$. Zatem $f'(1) = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$. A zatem prosta styczna to: $y = -\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{2} = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$.

2. Oblicz pochodne funkcji:

a) $a(x) = \operatorname{arctg} x$

$a(x) = f^{-1}(x)$ dla $f(x) = \operatorname{tg} x$. $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Zatem $a'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$.

b) $b(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \log_7 x}{\sin(5x) + \operatorname{arctg} x}$.

$$b'(x) = \frac{\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x \ln 7}\right)(\sin(5x) + \operatorname{arctg} x) - \left(5 \cos 5x + \frac{1}{1 + x^2}\right)(\sqrt[3]{x^2} + \log_7 x)}{(\sin(5x) + \operatorname{arctg} x)^2}.$$

c) $c(x) = \sin(\ln(\cos x))$

$$c'(x) = -\sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \cos(\ln(\cos x)).$$

d) $d(x) = x^x$.

Wskazówka: $x^x = e^{x \ln x}$.

e) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

$$f'(x) = \left(\frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2}\right) 3 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{-6(x+1)^2}{(x-1)^4}.$$

f) $g(x) = 3^{\sin x}$

$$g'(x) = \cos x 3^{\sin x} \ln 3.$$

g) $h(x) = (1+x)^{\sqrt{x}}$

Zauważ, że:

$$h(x) = e^{\ln(1+x) \cdot \sqrt{x}}$$

A zatem:

$$h'(x) = (\ln(1+x) \cdot \sqrt{x})' e^{\ln(1+x) \cdot \sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}\right) (1+x)^{\sqrt{x}}.$$

3. Korzystając z Tw. Lagrange'a udowodnij, że dla każdych liczb a, b takich, że $0 < a < b$ zachodzi:

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Niech $f(x) = \ln x$. Wtedy $f'(x) = \frac{1}{x}$. Z Tw. Lagrange'a istnieje $c \in (a, b)$, że

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}.$$

Ponieważ $a < c < b$, to:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}.$$

A zatem:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

Ponieważ $\ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$ oraz $b - a > 0$, to

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

□

4. Zbadać, jaki prostokąt ma największe pole wśród wszystkich prostokątów o obwodzie 1.

Mamy $2a + 2b = 1$, czyli $b = \frac{1-2a}{2}$, a zatem $P(a) = ab = a \frac{1-2a}{2} = -a^2 + \frac{a}{2}$. Znajdujemy kandydata na ekstremum: $P'(a) = -2a + \frac{1}{2} = 0$, czyli $a = \frac{1}{4}$. To jest maksimum lokalne, bo dla $a < \frac{1}{4}$, $P'(a) > 0$ – P rośnie, zaś dla $a > \frac{1}{4}$, $P'(a) < 0$, P maleje. A zatem maksymalne pole jest dla $a = \frac{1}{4}$ (więc $b = \frac{1}{4}$ i mamy kwadrat).