

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 24. – rozwiązania

8 grudnia 2020

1. Zbadaj ciągłość następujących funkcji:

a)
$$d(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Wskazówka: granica w 0 nie istnieje, bo dla $x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0$ mamy $f(x_n) = 0 \rightarrow 0$, ale dla $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \rightarrow 0$ mamy $f(y_n) = 1 \rightarrow 1$.

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Oczywiście f jest ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, bowiem dla $x \in (z, z+1)$, $z \in \mathbb{Z}$, mamy $f(x) = z$. Tymczasem, jeśli w punkcie $z \in \mathbb{Z}$ mamy $\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} (z-1) = z-1$ oraz $\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^+} z = z$, czyli granice jednostronne są różne. f nie ma w punktach całkowitych granicy, zatem też nie jest ciągła.

c) $g(x) = x \lfloor x \rfloor$

Oczywiście f jest ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, bowiem dla $x \in (z, z+1)$, $z \in \mathbb{Z}$, mamy $f(x) = x(z+1)$. Tymczasem, jeśli w punkcie $z \in \mathbb{Z}$ mamy $\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} xz = z^2$ oraz $\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^+} x(z+1) = z^2 + z$, czyli granice jednostronne są różne dla każdego $z \neq 0$. f nie ma w niezerowych punktach całkowitych granicy, zatem też nie jest w nich ciągła. Natomiast dla $z = 0$, mamy $z^2 = z^2 + z$, zatem f ma granicę w zerze i ta granica wynosi zero, tyle, co $f(0)$. Zatem f jest ciągła w punkcie 0.

d)
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \lfloor x \rfloor} & : x \notin \mathbb{Z} \\ x & : x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Znów widać, że ta funkcja jest ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, bowiem dla $x \in (z, z+1)$, $z \in \mathbb{Z}$, mamy $f(x) = \frac{x}{x-z}$. Dla $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mamy $\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} \frac{x}{x-(z-1)} = \frac{z}{z-(z-1)} = z$, ale $\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^+} \frac{x}{x-z} = \pm \infty$ (dodatnia dla $z > 0$ i ujemna dla $z < 0$). A zatem tylko lewa granica jest równa wartości funkcji (funkcja jest lewostronnie ciągła w tych punktach). Nie ma jednak granicy i nie jest zatem ciągła w tych punktach.

Natomiast dla zera: mamy $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x-(-1)} = \frac{0}{0+1} = 0$, ale $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x-0} = 1$. A zatem tylko lewa granica jest równa wartości funkcji (funkcja jest lewostronnie ciągła w zerze). Nie ma jednak granicy i nie jest zatem ciągła w zerze.

2. Zbadaj ciągłość funkcji
$$h(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\pi/2 \\ a \sin x + b, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \geq \pi/2 \end{cases}.$$

Wskazówka: sprawdź granice lewo i prawostronne w „podejrzanych punktach” $-\pi/2$ oraz $\pi/2$.

3. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \sin x$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Wskazówka: ze wzorów trygonometrycznych: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Niech $\varepsilon > 0$. Wystarczy wziąć $\delta = \min(\varepsilon, \pi)$. Rzeczywiście, jeśli $|x_1 - x_2| \leq \delta$, Bez straty ogólności założymy, że $x_1 > x_2$, zatem $|\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \cos \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_1-x_2}{2} \right| = 2 \left| \cos \frac{x_1+x_2}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x_1-x_2}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{x_1-x_2}{2} \leq 2 \cdot \frac{x_1-x_2}{2} = x_1 - x_2 \leq \delta = \varepsilon$. $\square$

4. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła na przedziale $(0, 1)$.

Niech $\varepsilon = 1$. Załóżmy, że istnieje δ oraz założymy bez straty ogólności, że $\delta < \frac{1}{2}$, taka że dla każdych x_1, x_2 , takich że $|x_1 - x_2| < \delta$ mamy $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \leq 1$. Niech $x_1 = \delta$ oraz $x_2 = \frac{1}{2+\frac{1}{\delta}}$. A zatem $0 < x_2 < x_1$, czyli $|x_1 - x_2| < \delta$ oraz $\left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right| = 2 > 1$, co daje sprzeczność. $\square$

5. Wykaż, że równanie $\operatorname{tg} x = x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Rzeczywiście, funkcja $h(x) = \operatorname{tg} x - x$ jest ciągła na każdym przedziale

$$(-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi)$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2 + k\pi^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

i $\lim_{x \rightarrow -\pi/2 + k\pi^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, zatem w każdym takim przedziale istnieją punkty x_0, x_1 , że $f(x_0) < 0 < f(x_1)$, a zatem z własności Darboux wynika teza.

6. Naszkieować wykres funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}, x \geq 0.$$

Dla $0 \leq x \leq 1$ mamy $1 \leq \sqrt[n]{1+x^n} \leq \sqrt[n]{2}$. Ale ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, to z twierdzenia o trzech ciągach, w tym przypadku $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = 1$.

Dla $x > 1$ mamy $x < \sqrt[n]{1+x^n} < \sqrt[n]{2x^n} = \sqrt[n]{2}x$, więc znowu z twierdzenia o trzech ciągach, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = x$. Zatem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1 \end{cases}.$$

