

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 23. – rozwiązania

7 grudnia 2020

1. Zbadaj ciągłość następujących funkcji:

a) $y(x) = |x - 2|$

Ta funkcja jest ciągła wszędzie. Jedyłą wątpliwość mógłby budzić punkt $x = 2$, ale $\lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 2| = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = 0$, zatem $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0 = f(2)$.

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Nie budzi wątpliwości, że ta funkcja jest ciągła poza punktem $x = 0$. Ale jest ciągła także w punkcie $x = 0$, bowiem jeśli $x_n \rightarrow 0$, to ciąg $x_n \sin \frac{1}{x_n}$ jest iloczynem ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego, a zatem całość jest zbieżna do zera. Zatem z def. Heinego, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Zatem ta funkcja jest ciągła.

c) $g(x) = x - [x]$

Ta funkcja generuje część ułamkową liczby. Zatem jeśli $x \in [n, n+1)$ dla $n \in \mathbb{Z}$, to $g(x) = x - n$ jest ciągła wewnątrz tego przedziału. Jedyne miejsca, w których może być nieciągła, to x całkowite. I rzeczywiście, jeśli $z \in \mathbb{Z}$, to $\lim_{x \rightarrow z^+} g(x) = x - z = 0$, ale $\lim_{x \rightarrow z^-} g(x) = x - (z - 1) = 1$, czyli ta funkcja nie ma granicy w punktach całkowitych i zatem nie jest ciągła w tych punktach.

d) $h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Ta funkcja jest ciągła w punkcie $x = 0$. Bowiem jeśli $x_n \rightarrow 0$, to $-|x_n| \leq h(x_n) \leq |x_n|$, więc z twierdzenia o trzech ciągach $h(x_n) \rightarrow 0$, a zatem $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$.

Nie jest natomiast ciągła dla $x \neq 0$.

2. Czy istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$, taka, że następująca funkcja jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$?

a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

Tak, $a = 0$ jest jedyną taką liczbą, bowiem jeśli $x_n \rightarrow 0$, to ciąg $x_n \sin \frac{\pi}{x_n}$ jest iloczynem ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego, a zatem całość jest zbieżna do zera.

b) $f(x) = \begin{cases} \arctg x^{-1}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

Nie, bowiem $\arctg x^{-1}$ nie ma granicy w zerze, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg x^{-1} = \pi/2$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg x^{-1} = -\pi/2$.

3. Zbadaj ciągłość funkcji f określonej jako $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin x)^{2n}$.

Skoro $|\sin x| < 1$ dla $x \neq k\pi + \pi/2$, to $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin x)^{2n} = 0$ dla takich x . Natomiast dla $x = 2\pi + \pi/2$, $\sin x = \pm 1$, więc $f(x) = 1$ dla takich x , czyli

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2), k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{dla } x = k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Co oznacza, że ta funkcja jest nieciągła w punktach zbioru $\{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ i ciągła w każdym innym punkcie.

4. Wykazać, że równanie $x2^x = 1$ ma co najmniej jedno rozwiązanie należące do przedziału $(0, 1)$.

Sprawdzamy wartości funkcji $f(x) = x2^x - 1$, która jest oczywiście ciągła. $f(0) = -1 < 0$, oraz $f(1) = 1 > 0$, zatem z własności Darboux, istnieje $a \in (0, 1)$, że $f(a) = 0$, zatem takie a jest rozwiązaniem tego równania.

5. Udowodnij, że wielomian $2x^5 - 3x^3 + x^2 + 4$ ma w przedziale $(-2, 1)$ co najmniej jeden pierwiastek.

Zauważmy, że $w(-2) = -64 + 24 + 4 + 4 = -32 < 0$ oraz $w(1) = 2 - 3 + 1 + 4 = 4 > 0$, a zatem z własności Darboux istnieje $x \in (-2, 1)$, że $w(x) = 0$. $\square$