

# Matematyka 0 WCh, 2020/2021

## ćwiczenia 22. – rozwiązania

4 grudnia 2020

1. Oblicz, o ile istnieją, granice funkcji:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10},$

Wskazówka: wyciągnij  $x^2$  przed nawias w liczniku i mianowniku.

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10},$

Wskazówka: skoro 2 jest pierwiastkiem licznika i mianownika, to wyciągnij  $(x - 2)$  przed nawias.

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 7x + 10},$

Wskazówka: wystarczy, że skorzystasz z praw arytmetyki nieskończonych granic.

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^7 - 5x + 6)}{\ln(x^9 - 7x + 10)},$

Wskazówka: w każdym argumentie  $\ln$  wyciągnij odpowiednio  $x^7$  i  $x^9$  przed nawias i rozpisz  $\ln$  na sumę, a następnie skróć  $\ln x$  wyciągając przed nawias.

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{x},$

Wskazówka: podstaw  $y = 7x$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x},$

Wskazówka: podstaw  $y = \arcsin x$ .

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \operatorname{tg}(\pi x))}{x}.$

Niech  $f(x) = \frac{\ln(1 + 2 \operatorname{tg}(\pi x))}{x}$ . Rozważmy funkcję:

$$g(x) = e^{f(x)} = (1 + 2 \operatorname{tg} \pi x)^{1/x} = \left( (1 + 2 \operatorname{tg} \pi x)^{1/(\operatorname{tg} \pi x)} \right)^{\frac{\operatorname{tg} \pi x}{x}}.$$

Granica funkcji  $(1 + 2 \operatorname{tg} \pi x)^{1/(\operatorname{tg} \pi x)}$  przy  $x \rightarrow 0$  wynosi  $e^2$ , bowiem  $\operatorname{tg} \pi x$  zbiega do 0 dla  $x \rightarrow 0$ . Tymczasem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x \cos \pi x} = \pi,$$

bowiem  $\cos \pi x \rightarrow 1$ , a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1$ . Wobec tego  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e^{2\pi}$ , a więc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2\pi$ .

2. Znajdź granicę ciągu  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$ .

Ta granica jest taka sama jak granica funkcji  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$ . Podstawiając  $t = 2^x - 1$  mam  $x = \lg(1 + t)$  i  $t \rightarrow 0$ , gdy  $x \rightarrow 0$ . Zatem szukamy  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\lg(1+t)}$ . Mamy  $\lim_{t \rightarrow 0} 2^{\frac{\lg(1+t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e$ , zatem  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\lg(1+t)} = 1/\lg e$  i w takim razie  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = 1/\lg e = \ln 2$ .

3. Wyznacz asymptoty (poziome, pionowe, ukośne) funkcji:

a)  $f(x) = \frac{5}{x+7}$

Wskazówka: sprawdź dziedzinę i asymptotę pionową w punkcie poza dziedziną oraz asymptoty poziome.

b)  $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Wskazówka: sprawdź dziedzinę i końce tej dziedziny, oraz asymptoty ukośne.

c)  $h(x) = x - 2\operatorname{arctg}x$

Wskazówka: Narysuj funkcję  $\operatorname{arctg}$  i sprawdź asymptoty ukośne.