

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 21. – rozwiązania

1 grudnia 2020

1. Oblicz, o ile istnieją, granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3})(2 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - x + 3}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-1}{(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = \frac{-1}{14 \cdot 4} = \frac{-1}{56}.\end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x-4} - 1}{x - 5}$

Skorzystam z podstawienia $y(x) = x - 5$. Zatem jeśli $x \rightarrow 5$, to $y \rightarrow 0$, co więcej oczywiście $y = 0$, tylko gdy $x = 5$. Zatem:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x-4} - 1}{x - 5} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{y+1} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{y+1} - 1)((\sqrt[3]{y+1})^2 + \sqrt[3]{y+1} + 1)}{y((\sqrt[3]{y+1})^2 + \sqrt[3]{y+1} + 1)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y((\sqrt[3]{y+1})^2 + \sqrt[3]{y+1} + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{y+1})^2 + \sqrt[3]{y+1} + 1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 10x + 20}{x - 10}$

$$\frac{x^2 - 10x + 20}{x - 10} = \frac{x - 10 + \frac{20}{x}}{1 - \frac{10}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{-\infty - 10 - 0}{1 + 0} = -\infty.$$

2. Wiedząc, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

Skoro $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, to $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$, a zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2x} \sin 2x}{\frac{1}{5x} \sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

3. Wiedząc, że $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$.

Policzę osobno

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x)^{\frac{1}{x}}.$$

Stosuję podstawienie $y = \frac{1}{x} - 1$. Jeśli $x \rightarrow 0^-$, to $y \rightarrow -\infty$ – i jest tylko wtedy. A zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{y+1} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{y+1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e}.$$

Podobnie dowodzimy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e},$$

a zatem ponieważ obie granice są równe, to

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$$

4. Wyznacz asymptoty (poziome, pionowe, ukośne) funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

Oczywiście $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$, czyli $x = -2$ jest asymptotą pionową prawostronną. Jest ona też asymptotą lewostronną, bowiem $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$.

Poza tym $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, więc prosta $y = 0$ jest obustronną asymptotą poziomą. A zatem oczywiście nie ma asymptot ukośnych.

b) $g(x) = 2^x + 3$

Oczywiście nie ma asymptot pionowych, ani ukośnych. Jedyne $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 3$, a zatem $y = 3$ jest asymptotą poziomą lewostronną.

c) $h(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1}$

Przed wszystkim mamy asymptotę pionową $x = -1$, bo $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x + 2 - \frac{2}{x+1}\right) = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x + 2 - \frac{2}{x+1}\right) = -\infty$.

Sprawdzamy asymptotę skośną: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$. Oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$. A zatem prosta $y = x + 2$ jest asymptotą ukośną prawostronną. Jest tak naprawdę obustronna, bo również $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = 1$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = 2$.

5. Naskicować wykres funkcji

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg nx).$$

Gdy $x = 0$, to $nx = 0$, więc $\arctg nx = 0$. Gdy $x > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} nx = \infty$, więc

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg nx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\arctg x) = \pi/2$$

oraz gdy $x < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} nx = -\infty$, więc

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg nx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\arctg x) = -\pi/2.$$

