

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 17. – rozwiązania

23 listopada 2020

1. Obliczyć granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 12n \sin n + 2016\sqrt{n+3}}{7 \cos n + 12n\sqrt{n} + 1970n^2}.$

Wskazówka: wyciągnąć n^2 przed nawias.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \cdot n^n}.$

$1 \leq \sqrt[n]{n! \cdot n^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot n^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot n^{n-1/n} = \sqrt[n]{2} \cdot n^{1/n^{n-1}} \leq \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, zatem szukana granica to 1.

2. Niech a_n oznacza sumę odwrotności kolejnych liczb naturalnych nieparzystych od $2n+1$ do $4n-1$, a zatem:

$$a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \cdots + \frac{1}{4n-1}.$$

a) Udowodnij, że $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n+3} - \left(\frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{1}{4n-1} \right) = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(4n+1)(4n+3)} > 0.$$

b) Dowieść, że $\frac{1}{3} \leq a_n < \frac{1}{2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wskazówka: oszacuj każdy wyraz największym. Wyrazów jest $(4n-1-(2n+1))/2 = (2n-2)/2 = n-1$. Dla oszacowania z dołu użyj pierwszego wyrazu ciągu.

c) Dowieść, że $\frac{1}{3} < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{1}{2}$.

Jest to jasne, skoro ciąg jest rosnący i ograniczony.

3. Obliczyć granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{3 + 2n + n^2}.$

Wskazówka: wyciągnij n^2 .

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + n^n}{(n+1)^n}.$

$\frac{n! + n^n}{(n+1)^n} = \frac{n!}{(n+1)^n} + \frac{n^n}{(n+1)^n} \rightarrow 0 + 1/e = 1/e$, bowiem $\frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n+1} \leq (1/2)^{n/2} \cdot 1 \rightarrow 0$ oraz $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$.

4. Oblicz granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{966n^{972} + 1000n^{1025}}{1138n^{1241} + 1320n^{1333} + 1410n^{1525}}$

Wskazówka: wyciągnij przed nawias

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(966n^{972} + 1000n^{1025})}{\ln(1138n^{1241} + 1320n^{1333} + 1410n^{1525})}.$

Wskazówka: w każdym z logarytmów wyciągnij najwyższą potęgę i skorzystaj z prawa o logarytmie iloczynu. Wynik to $\frac{1025}{1525}$.

5. Oblicz granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1, 543^n + 1, 572^n}.$

Wskazówka: Oszacuj z dołu opuszczając mniejszy składnik i z góry zamieniając go na większy.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 1, 543^n + n^2 1, 572^n}.$

Wskazówka: Zauważ, że od pewnego momentu $n^3 1, 543^n < n^2 1572^n$.