

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 16. – rozwiązania

20 listopada 2020

1. Trygonometria. Niech $A = (3, 1, 2)$, $B = (10, 5, 6)$, $C = (11, 2, 6)$.

a) Zdefiniuj kosinus dowolnego kąta $\varphi > 0$.

Jest to pierwsza współrzędna punktu położonego na okręgu jednostkowym o środku w środku układu współrzędnych, takiego, że kąt pomiędzy dodatnią półprostą osi x i promieniem okręgu w tym punkcie wynosi φ .

b) Obliczyć kosinusy kąta ψ pomiędzy wektorami $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$.

$\vec{AB} = (7, 4, 4)$, $\vec{AC} = (8, 1, 4)$. Z tw. cosinusów wynika, że

$$\cos \alpha = \frac{\langle (7, 4, 4), (8, 1, 4) \rangle}{\|(7, 4, 4)\| \cdot \|(8, 1, 4)\|} = \frac{76}{\sqrt{81 \cdot 81}} = \frac{76}{81}.$$

c) Rozstrzygnąć, czy kąt ψ jest większy od $\pi/6$.

$\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, a $\sqrt{3}/2 < 76/81$, bo $81\sqrt{3} < 152$, więc $\psi < \pi/6$.

2. Logarytmy i trygonometria.

a) Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach dotyczących c i d .

Wyrażenie to jest zdefiniowane dla $c > 0$ oraz $d \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ i wynosi a takie, że $d^a = c$.

b) Rozwiązać równanie $1 + 2 \log_2 \sin(t - \pi/6) < 0$ i zaznaczyć na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zbiór punktów złożony punktów postaci $(\cos t, \sin t)$.

$$2 \cdot \sin^2(t - \pi/6) < 1,$$

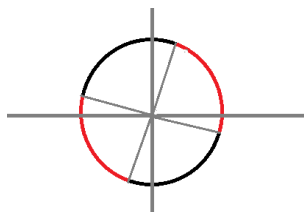
więc $\sin^2(t - \pi/6) < 1/2$, a zatem $\sin(t - \pi/6) \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ zatem

$$t - \pi/6 \in \{x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \wedge x \in (-\pi/4, \pi/4) \cup (3\pi/4, 5\pi/4)\}$$

i

$$t \in \{x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \wedge x \in (-\pi/12, 5\pi/12) \cup (11\pi/12, 17\pi/12)\}.$$

Zatem



3. Logarytmy.

a) Dowieść, że $\log_{10} 7 + \log_{10} 11 + \log_{10} 13 > 3$.

Tak, bo $7 \cdot 11 \cdot 13 > 1000$.

b) Która liczba jest większa? $3 \log_{10} 13 + \log_{10} 5$, czy $3 + \log_{10} 11$?

Po podniesieniu 10 do tych potęg dostajemy $13^3 \cdot 5 = 10985$ oraz $1000 \cdot 11 = 11000$. Więc druga liczba jest większa.

- c) Wykazać, że liczba $\log_{10} 12345$ nie jest całkowita.
Zauważmy, że $\log_{10}$ jest funkcją rosnącą. Zatem

$$4 = \log 10^4 < \log_{10} 12345 < \log 10^5 = 5.$$

Więc liczba $\log_{10} 12345$ nie jest całkowita.

4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 33 \\ 3 \log x + 2 \log y = 2 + \log 2 \end{cases}.$$

Drugie równanie po podniesieniu 10 do obu stron to $x^3 y^2 = 200$. Zatem jeśli $t = x^3$ oraz $u = y^2$, to $t + u = 33$, $tu = 200$. Zatem $t = 8$, $u = 25$ lub na odwrót. Czyli $x = 2$, $y = \pm 5$ lub $x = \sqrt[3]{25}$, $y = \pm 2\sqrt{2}$.