

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 15. – rozwiązania

17 listopada 2020

1. Trygonometria. Niech $A = (3, 1, 5)$, $B = (7, 5, 9)$, $C = (0, -5, 8)$, $D = (6, 7, -4)$.

a) Zdefiniuj kosinus dowolnego kąta $\varphi > 0$.

Jest to pierwsza współrzędna punktu położonego na okręgu jednostkowym o środku w środku układu współrzędnych, takiego, że kąt pomiędzy dodatnią półprostą osi x i promieniem okręgu w tym punkcie wynosi φ .

b) Obliczyć kosinusy kątów α pomiędzy wektorami $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ oraz β pomiędzy wektorami $\vec{AB}$ i $\vec{AD}$.
 $\vec{AB} = (4, 4, 4)$, $\vec{AC} = (-3, -6, 3)$, $\vec{AD} = (3, 6, -9)$. Z tw. cosinusów wynika, że

$$\cos \alpha = \frac{\langle (4, 4, 4), (-3, -6, 3) \rangle}{\|(4, 4, 4)\| \cdot \|(-3, -6, 3)\|} = \frac{-24}{4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{2}}{3}.$$

$$\cos \beta = \frac{\langle (4, 4, 4), (3, 6, -9) \rangle}{\|(4, 4, 4)\| \cdot \|(3, 6, -9)\|} = 0.$$

c) Który z kątów α, β jest większy? Czy $\alpha > \pi/3$? Czy $\alpha > \pi/2$? Czy $\alpha > 2\pi/3$?

Jeśli rozważamy wartość kąta z przedziału $[0, \pi)$, to $\beta = \pi/2$. Skoro $\sqrt{2}/3 < 1/2$, to $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$.
Zatem: α , tak, tak, nie.

d) Patrz zadanie domowe.

2. Granice.

a) Podać definicję granicy ciągu (a_n) .

Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu a_n , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > N$ zachodzi $a_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$.

Granica ciągu to $+\infty$, jeśli dla każdego $m \in \mathbb{R}$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > N$ zachodzi $a_n > m$.

Granica ciągu to $-\infty$, jeśli dla każdego $m \in \mathbb{R}$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > N$ zachodzi $a_n < m$.

b) Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2016n^{11} + 2}{1805n^{12} + 2}$ i uzasadnić wynik w oparciu o definicje lub twierdzenia z wykładu.

$$\frac{2016n^{11} + 2}{1805n^{12} + 2} = \frac{2016 + 2/n^{11}}{1805n + 2/n^{11}}.$$

Wiadomo z wykładu/definicji, że ciąg $1/n$ zbiega do 0. Zatem z twierdzeń o arytmetyce granic, ciąg $1/n^{11}$ zbiega do $0^{11} = 0$. Zatem z twierdzeń o arytmetyce granic, ciąg $2/n^{11}$ zbiega do $2 \cdot 0 = 0$. Zatem z twierdzeń o arytmetyce granic licznik ułamka zbiega do $2016 + 0 = 2016$. Ciąg $1805n$ zbiega do ∞ , co wynika bezpośrednio z definicji. Zatem z twierdzenia o arytmetyce granic nieskończonych, podobnie do nieskończoności rozbiega mianownik. Zatem, znów z twierdzenia o arytmetyce granic nieskończonych, cały ułamek ma granicę w zerze.

3. Logarytmy.

a) Dowieść, że $\log_{10}(350 - 7) + \log_{10} \frac{1}{7} + \frac{\log_{10} 1024}{5} + \frac{4 \log_{10} 27}{3} < 14 \log_{10} 2 < 2 + 2 \log_{10} 13$.

$\log_{10}$ jest funkcją rosnącą, więc te nierówności zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(350 - 7) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt[3]{27^4} < 2^{14} < 100 \cdot 13^2.$$

Lewa strona to $49 \cdot 4 \cdot 81 = 15876$. Środek to 16358, a prawa strona to 16900, więc rzeczywiście wszystko się zgadza.

b) Która liczba jest większa? $\frac{\log_{10} 256}{\log_{10} 16} + \log_2 \sqrt{2}$, czy $\log_3 27 + \log_{49} \frac{1}{7} + \log_{10} 1,001$?

$\log 256 = \log 16^2 = 2 \log 16$, zatem $\frac{\log_{10} 256}{\log_{10} 16} + \log_2 \sqrt{2} = 2 + 1/2 = 5/2$.

$\log_3 27 + \log_{49} \frac{1}{7} + \log_{10} 1,001 = 3 - 1/2 + \log_{10} 1,001 = 5/2 + \log_{10} 1,001$, więc ta druga liczba jest większa, bo skoro $1,001 > 1$, to $\log 1,001 > 0$.

c) Wykazać, że liczba $\log_{10} 123456789$ nie jest całkowita.

Zauważmy, że $\log_{10}$ jest funkcją rosnącą. Zatem

$$8 = \log 10^8 < \log_{10} 123456789 < \log 10^9 = 9.$$

Więc liczba $\log_{10} 123456789$ nie jest całkowita.

4. Patrz zadanie domowe.