

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 14. – rozwiązania

16 listopada 2020

1. Trygonometria.

- a) Zdefiniuj kosinus dowolnego kąta $\varphi > 0$.

Jest to pierwsza współrzędna punktu położonego na okręgu jednostkowym o środku w środku układu współrzędnych, takiego, że kąt pomiędzy dodatnią półprostą osi x i promieniem okręgu w tym punkcie wynosi φ .

- b) Znajdź zbiór A złożony z tych $t \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi nierówność:

$$32 \cos^6 t - 48 \cos^4 t + 22 \cos^2 t - 3 > 0.$$

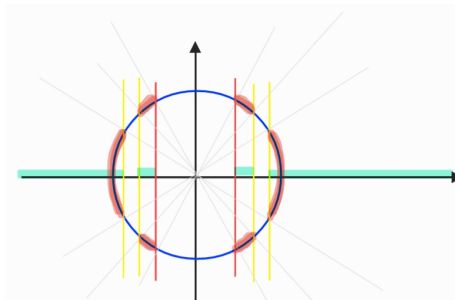
Niech $x = \cos^2 t$. Rozwiążmy równanie $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$. Zgadujemy, że $x = 1/2$ jest rozwiązaniem (rzeczywiście dla $x = 0$ mamy wartość ujemną, a dla $x = 1$ dodatnią). Mamy też $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = (x - 1/2)(32x^2 - 32x + 6)$, więc pozostałe pierwiastki, to $x = 1/4$ oraz $x = 3/4$. Zatem $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 > 0$ dla $x \in (1/4, 1/2)$ lub $x > 3/4$, czyli dla

$$\cos t \in (-\infty, -\sqrt{3}/2) \cup (-\sqrt{2}/2, -1/2) \cup (1/2, \sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{3}/2, \infty).$$

Zatem

$$A = \{t + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \wedge t \in (-\pi/6, \pi/6) \cup (\pi/4, \pi/3) \cup (2\pi/3, 3\pi/4) \cup (5\pi/6, 7\pi/6) \cup (5\pi/4, 4\pi/3) \cup (5\pi/3, 7\pi/8)\}.$$

- c) Zaznacz na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zbiór punktów złożony punktów postaci $(\cos t, \sin t)$, $t \in A$.



2. Granice. Obliczyć

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2017n^{11} + 2}{1805n^{12} + 2}.$

$$\frac{2017n^{11} + 2}{1805n^{12} + 2} = \frac{2017 + 2/n^{11}}{1805n + 2/n^{11}},$$

gdzie licznik dąży do 2017, a mianownik do $+\infty$, więc granica całości to 0.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2017n^{11} + 2)}{\ln(1805n^{12} + 2)}.$

$$\frac{\ln(2017n^{11} + 2)}{\ln(1805n^{12} + 2)} = \frac{\ln(n^{11}(2017 + 2/n^{11}))}{\ln(n^{12}(1805 + 2/n^{12}))} = \frac{11 \ln n + \ln(2017 + 2/n^{11})}{12 \ln n + \ln(1805 + 2/n^{12})} = \frac{11 + \frac{\ln(2017 + 2/n^{11})}{\ln n}}{12 + \frac{\ln(1805 + 2/n^{12})}{\ln n}}.$$

Skoro $2017 + 2/n^{11} \rightarrow 2017$, to $\ln(2017 + 2/n^{11}) \rightarrow \ln 2017$, a $\ln n \rightarrow \infty$, to $\frac{\ln(2017 + 2/n^{11})}{\ln n} \rightarrow 0$. Podobnie $\frac{\ln(1805 + 2/n^{12})}{\ln n} \rightarrow 0$. Zatem granica całości to $11/12$.

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1805n^{10} + 2}{2017n^{10} + 2} \right)^{n^2}.$$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{1805n^{10} + 2}{2017n^{10} + 2} \right) \rightarrow \frac{1805}{2017}$$

, zatem możemy być pewni, że co najmniej dla odpowiednio dużych n ,

$$\left(\frac{1805n^{10} + 2}{2017n^{10} + 2} \right)^{n^2} \leq \left(\frac{1806}{2017} \right)^{n^2} \rightarrow 0,$$

skoro $\frac{1806}{2017} < 1$. Zatem badany ciąg (jest dodatni) również dąży do 0.

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1805}{2n^2 + 2017} \right)^{n^2}.$$

$$\left(\frac{2n^2 + 1805}{2n^2 + 2017} \right)^{n^2} = \left(1 - \frac{404}{n^2 + 2017/2} \right)^{n^2 + 2017/2} \cdot \left(1 - \frac{404}{n^2 + 2017/2} \right)^{-2017/2} \rightarrow e^{-404} \cdot 1,$$

zatem szukana granica to $1/e^{404}$.

3. Logarytmy.

a) Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach dotyczących c i d .

Wyrażenie to jest zdefiniowane dla $c > 0$ oraz $d \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ i wynosi a takie, że $d^a = c$.

b) Rozwiązać równanie $\log \frac{x+5}{5} + \log \frac{x-2}{2} + \log \frac{x-3}{3} = \log \sqrt[10]{1024}$.

Podnosimy 10 do obu stron i dostajemy

$$\frac{x+5}{5} \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-3}{3} = \sqrt[10]{1024} = 2,$$

$$(x+5)(x-2)(x-3) = 60,$$

skąd widać, że jedno rozwiązanie to $x = 5$, pozostałe dwa są ujemne $-2, -3$, i jako takie nie mają zastosowania, bo powodują, że argumenty logarytmów są poza dziedziną.

c) Dowieść, że $\log_{10}(350-7) + \log_{10} \frac{1}{7} + \frac{\log_{10} 1024}{5} + \frac{4 \log_{10} 27}{3} < 14 \log_{10} 2 < 2 + 2 \log_{10} 13$.

$\log_{10}$ jest funkcją rosnącą, więc te nierówności zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(350-7) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt[3]{27^4} < 2^{14} < 100 \cdot 13^2.$$

Lewa strona to $49 \cdot 4 \cdot 81 = 15876$. Środek to 16358, a prawa strona to 16900, więc rzeczywiście wszystko się zgadza.

4. Granice. Niech $a_{n+1} = -a_n + a_n^3$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$ oraz $a_0 \in \mathbb{R}$.

a) Udowodnić, że jeśli $0 < |a_0|^2 < 2$, to $|a_{n+1}| < |a_n|$ i wywnioskować stąd, że wtedy ciąg a_n ma skończoną granicę i znaleźć ją.

Mamy: $a_{n+1} = -a_n + a_n^3 = a_n(a_n^2 - 1)$. Udowodnimy najpierw, że jeśli $0 < |a_0|^2 < 2$, to $|a_n|^2 < 2$. Rzeczywiście w pierwszym kroku się zgadza. W drugim kroku indukcyjnym założmy, że $|a_k|^2 < 2$. Wtedy $|a_{k+1}| = |a_k|(a_k^2 - 1) \leq 2 \cdot 1$. Zgadza się. Ale skoro $|a_n|^2 < 2$, mamy

$$|a_{n+1}| = |a_n|(a_n^2 - 1) \leq |a_n| \cdot 1 = |a_n|.$$

Zatem ciąg $|a_n|$ jest malejący i ograniczony z dołu przez zero, zatem ten ciąg zbiega do granicy g oraz $g = g(g^2 - 1)$, zatem $g = 0$ lub $g = \pm\sqrt{2}$, ale tylko ta pierwsza wersja ma sens, skoro ciąg $|a_n|$ jest malejący, dodatni i mniejszy od $\sqrt{2}$. Czyli $|a_n| \rightarrow 0$, a zatem również $a_n \rightarrow 0$, bowiem $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$. Ciąg a_n sam w sobie nie musi być monotoniczny. Np. dla $a_0 = -1/2 < 0$ mamy $a_1 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{4} = \frac{3}{8} > 0$, $a_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{-54}{64} < 0$.

b) Udowodnić, że jeśli $|a_0|^2 > 2$, to $|a_{n+1}| > |a_n|$ oraz że wtedy ciąg a_n ma granicę i wyznaczyć ją w zależności od a_0 . Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

Niech $a_0 > \sqrt{2}$, dowodzimy, że dla każdego n , $a_n > \sqrt{2}$ przez indukcję. Rzeczywiście, jeśli $a_k > \sqrt{2}$, to $a_{k+1} > \sqrt{2}(2-1) = \sqrt{2}$. Zatem $a_{n+1} > a_n$, czyli a_n jest monotonicznym ciągiem rosnącym. Mamy zatem, że $a_n > a_0(a_0^2 - 1)^n$. Rzeczywiście możemy tego dowieść łatwo przez indukcję. Skoro jednak $a_0^2 - 1 > 1$, to $a_0(a_0^2 - 1)^n \rightarrow \infty$, zatem badany ciąg również rozbiega do $+\infty$.

Podobnie, niech $a_0 < -\sqrt{2}$, dowodzimy, że dla każdego n , $a_n < -\sqrt{2}$ przez indukcję. Rzeczywiście, jeśli $a_k < -\sqrt{2}$, to $a_{k+1} < -\sqrt{2}(2-1) = -\sqrt{2}$. Zatem $a_{n+1} < a_n$, czyli a_n jest monotonicznym ciągiem malejącym. Mamy zatem, że $a_n < a_0(a_0^2 - 1)^n$. Rzeczywiście możemy tego dowieść łatwo przez indukcję. Skoro jednak $a_0^2 - 1 > 1$, to $a_0(a_0^2 - 1)^n \rightarrow -\infty$, zatem badany ciąg również rozbiega do $-\infty$.