

Matematyka 0 WCh, 2020/2021
ćwiczenia 9. – rozwiązania lub wskazówki

3 listopada 2020

1. Korzystając z twierdzenia związanego z arytmetyką granic, oblicz granice ciągów (dopuszczamy nieskończoności):

a) $a_n = -3n^4 + n^2 - 4 + 2$,

Zatem $a_n = n^4 \left(-3 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right)$. Wyrażenie w nawiasie zbiega do -3 , więc z twierdzenia o arytmetyce nieskończonych granic, całość rozbiega do $-\infty$.

b) $b_n = \frac{3n+2}{-n-2}$,

$$b_n = \frac{n(3+\frac{2}{n})}{n(-1-\frac{2}{n})} = \frac{3+\frac{2}{n}}{-1-\frac{2}{n}} \rightarrow \frac{3}{-1} = -3.$$

c) $c_n = \frac{3n^3+2n^2-5}{-n^4-2}$,

$$c_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^4}}{-1-\frac{2}{n^4}} \rightarrow 0 \cdot \frac{0}{-1} = 0$$

d) $d_n = \frac{4^{n+2}-3^n}{-5^n+(-1)^{n+1}}$,

$$d_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{16-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{-1-\left(\frac{-1}{5}\right)^n} \rightarrow 0 \cdot \frac{16}{-1} = 0.$$

e) $e_n = \frac{4^{n+2}-3^n}{-4^n+(-1)^{n+1}}$,

$$e_n = \frac{4^{n+2}}{4^n} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{-1-\left(\frac{-1}{4}\right)^n} = 16 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{-1-\left(\frac{-1}{4}\right)^n} \rightarrow 16 \cdot \frac{1}{-1} = -16.$$

f) $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

$$f_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}. \text{ Ponieważ mianownik rozbiega do nieskończoności to całość zbiega do zera.}$$

g) $g_n = \sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n-1})$,

$$g_n = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{3n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n-1})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n-1}} = \frac{\sqrt{n}(-n)}{\sqrt{n}(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{3-\frac{1}{n}})} = \frac{-n}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{3-\frac{1}{n}}}. \text{ Ponieważ licznik zbiega do } -\infty, \text{ a mianownik do pewnej skończonej dodatniej liczby, to całość zbiega do } -\infty.$$

2. Korzystając z tego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, oblicz granice:

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^2.$$

b) $b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$,

b_n jest podciągiem ciągu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, zatem również zbiega do e .

c) $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}$,

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \rightarrow e^2 \cdot 1 = e^2.$$

$$\text{d) } d_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n, \\ d_n = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}} \rightarrow \sqrt[3]{e}. \text{ (Znów stosujemy fakt o podciągu).}$$

$$\text{e) } e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \\ e_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \rightarrow \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e}.$$

$$\text{f) } f_n = \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{3n}. \\ f_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}}{\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)} \rightarrow \frac{e}{1} = e. \text{ (Znów stosujemy fakt o podciągu).}$$

3. Czy następujące ciągi są ciągami Cauchy'ego. Odpowiedź uzasadnij na podstawie definicji.

$$\text{a) } a_n = \frac{(-1)^n}{n+1},$$

Tak. Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy niech $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$. Jeśli $n, m > N$, to $|a_n - a_m| \leq |a_n| + |a_m| \leq \frac{2}{N+1} \leq \varepsilon$.

$$\text{b) } b_n = (1 + (-1)^n)^n.$$

Nie. Niech $\varepsilon = 1$. Dla każdego N , niech n będzie parzystą liczbą większą od N i od 1 oraz $m = n + 2$. Wtedy $|b_n - b_m| = 2^{n+2} - 2^n \geq 2 > \varepsilon = 1$.

4. Posługując się granicami ciągów, przedstawić ułamek dziesiętny okresowy $0,(12345)$ w postaci ułamka n/m .

Niech ciąg a_n będzie zdefiniowany jako $\sum_{i=1}^n 12345 \cdot 10^{-5i}$, oraz $b_n = 10^5 a_n$. Wtedy $b_{n+1} - a_n = 12345$. Czyli, jeśli g to granica a_n , to $10^5 g - g = 12345$, zatem $g = 12345/99999$.

5. Niech a_n będzie ciągiem takim, że $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg a_n jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Owszem ten ciąg jest ograniczony, przez 3. Rzeczywiście, wykazujemy to przez indukcję: $a_1 < 3$. Jeśli $a_k < 3$, to rzeczywiście $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{9} = 3$.

Jest też rosnący. Rzeczywiście, chcemy udowodnić, że $a_{k+1} > a_k$, czyli $6 + a_k > a_k^2$, co jest prawdą dla $-2 < a_k < 3$, a wiemy już, że $a_k < 3$ i oczywiście $a_k > 0$.

Zatem ten ciąg jest zbieżny. W takim razie $b_n = a_{n+1}$ ma tę samą granicę g , co a_n i wobec tego $g = \sqrt{6 + g}$, z czego dostajemy $g = 3$ (opcja $g = -2$ odpada, bo ciąg jest dodatni).

6. Na imieninach cioci Haliny jest trochę nudno, więc pan Henio co godzinę wypija filiżankę espresso, żeby nie zasnąć (pierwszą filiżankę wypił od razu po przyjeździe). Filiżanka espresso zawiera 50 mg kofeiny; w ciągu godziny zawartość kofeiny we krwi spada o 20%. Ile kofeiny we krwi będzie miał pan Henio po trzech godzinach imprezy? Czy ilość kofeiny we krwi pana Henia będzie wzrastać z każdą godziną? Czy gdyby imieniny trwały baaardzo długo to kawa mogłaby mu zaszkodzić (niebezpieczna ilość kofeiny to 1000 mg)? Odpowiedzieć na te same pytania w sytuacji gdyby pan Henio przyszedł na imieniny cioci Haliny bezpośrednio z urodzin dziadka Edmunda (wtedy miałby na początku imienin 500 mg kofeiny we krwi).

Po godzinie mamy $50 \cdot 0,8 + 50 = 90$. Po dwóch godzinach $90 \cdot 0,8 + 50 = 122$, a po trzech jest to $122 \cdot 0,8 + 50 = 147,6$. Ogólnie $a_0 = 50$ oraz $a_{n+1} = a_n \cdot 0,8 + 50$.

Zauważmy, że jest to liczba ograniczona przez 250. Rzeczywiście $a_0 < 250$ oraz jeśli $a_n < 250$, to $a_{n+1} = a_n \cdot 0,8 + 50 < 250 \cdot 0,8 + 50 = 250$.

Jest to ciąg rosnący, bowiem $a_n \cdot 0,8 + 50 > a_n$, dla $a_n < 250$, a to udowodniliśmy przed chwilą. Zatem jest zbieżny i jego granica spełnia równanie $g = 0,8g + 50$. Zatem $g = 250$ i sytuacja nie jest groźna, bo $g < 1000$.

W drugim przypadku $a_0 = 550$. Zatem dostajemy tym razem, że $a_n > 250$, bo $a_0 > 250$ i jeśli $a_n > 250$, to $a_n \cdot 0,8 + 50 > 250 \cdot 0,8 + 50 = 250$. Na szczęście, dla pana Henia, oznacza to, że ciąg jest malejący i nadal zbieżny do 250. Pan Henio nie umrze i tym razem.