

Matematyka 0 WCh, 2020/2021
ćwiczenia 8. – rozwiązania lub wskazówki

2 listopada 2020

1. Obliczyć (i udowodnić korzystając z definicji) granice ciągów:

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$

Oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Rzeczywiście niech $\varepsilon > 0$. Wtedy możemy wziąć $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Wtedy dla każdego $n > N$, mamy $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

b) $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

Podobnie, jak wyżej $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy niech $N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$. Dla $n > N$ mamy wtedy $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

c) $c_n = \frac{1}{3^n}$

I znów $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Niech $N = \left\lceil \log_3 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Wtedy jeśli $n > N$, to $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

2. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

Zauważmy, że $\frac{-1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n+1} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$, to i badany ciąg dąży do zera.

b) $b_n = \frac{n^2}{4^n}$

Zauważmy, że $0 \leq \frac{n^2}{4^n} \leq \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$, o ile $n > 3$, a jest tak, ponieważ dla każdego $n > 3$ mamy $n^2 \leq 2^n$. Ciąg stale równy 0, jak i ciąg $\frac{1}{2^n}$ mają granicę w zerze, więc badany ciąg również.

c) $c_n = \sqrt[n]{n}$, $n > 0$. Wskazówka: niech $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Wtedy $n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$.

Rzeczywiście rozważmy najpierw granicę ciągu $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Z jednej strony $n = (1 + b_n)^n$, z drugiej strony moglibyśmy „wymnożyć” ten nawias z potęgą i zaczynało by się to $1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 + \dots$. Te współczynniki można znaleźć w tablicach lub zobaczyć je kombinatorycznie (musimy wziąć dwa nawiasy z b_n , pierwszy na n sposobów, drugi na $n-1$ sposobów, wszystko jedno, który wybierzemy najpierw). Zatem $(1 + b_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$, czyli $n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$, a zatem $\frac{2}{n} \geq b_n^2$, czyli $\sqrt{\frac{1}{n}} \geq b_n \geq 0$. Czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ z tw. o trzech ciągach. A zatem $a_n \rightarrow 1$.

3. Korzystając z twierdzenia związanego z arytmetyką granic, oblicz granice ciągów:

$$a_n = \frac{2n^2 + n + 2015}{n^2 - 4n - 2015}$$

$$a_n = \frac{2n^2 + n + 2015}{n^2 - 4n - 2015} = \frac{n^2(2 + \frac{1}{n} + \frac{2015}{n^2})}{n^2(1 - \frac{1}{n} - \frac{2015}{n^2})} = \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{2015}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} - \frac{2015}{n^2}} \rightarrow \frac{2 + 0 + 0}{1 - 0 - 0} = 2$$

$$b_n = \frac{n^2 + 4^n}{5 + 2^n + 4^{n+1}}$$

$$b_n = \frac{n^2 + 4^n}{5 + 2^n + 4^{n+1}} < \frac{2^n + 4^n}{5 + 2^n + 4^{n+1}},$$

dla $n > 4$ oraz

$$= \frac{4^n(\frac{1}{2^n} + 1)}{(4^n(\frac{5}{4^n} + \frac{1}{2^n} + 4))} = \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{5}{4^n} + \frac{1}{2^n} + 4} = \frac{0 + 1}{0 + 0 + 4} = \frac{1}{4}$$

4. Udowodnij, że jeśli ciąg x_n jest zbieżny do zera oraz ciąg y_n jest ograniczony, to ciąg $x_n \cdot y_n$ jest zbieżny do zera.

Ponieważ ciąg y_n jest ograniczony, to istnieje liczba $m \in \mathbb{R}$, taka że $|y_n| \leq m$, dla każdego $n > 0$.

Niech $\varepsilon > 0$. Niech $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$. Ponieważ ciąg x_n zbiega do zera, to istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > N$, to $|x_n| < \delta$. Zatem dla takich n , $|x_n y_n| = |x_n| |y_n| \leq \delta \cdot m = \varepsilon$. $\square$

5. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{3n^2 + 2}.$$

Oczywiście ciąg $\sin n!$ jest ograniczony zatem $\frac{n \sin n!}{3n^2 + 2} = \left(\frac{n}{3n^2 + 1}\right) \cdot \sin n!$ jest iloczynem ciągu dążącego do zera oraz ciągu ograniczonego. Ciąg $\frac{n}{3n^2 + 1}$ dąży bowiem do zera, bo $\frac{n}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3n + \frac{1}{n}}$. A zatem badany w zadaniu ciąg również zbiega do 0.

6. Udowodnij, że następujące ciągi są rozbieżne do nieskończoności:

a) $a_n = \frac{4^n}{n^3}$

Ponieważ dla każdego $n \geq 10$ mamy $2^n > n^3$, to $\frac{4^n}{n^3} > 2^n$ dla $n \geq 10$. Zatem mając dane m , jeśli $N = \max(10, \lceil \log_2 m \rceil)$, to dla $n > N$ mam $\frac{4^n}{n^3} > 2^n > m$.

b) $b_n = ((-1)^n + 2)n + n^2$

Oczywiście $((-1)^n + 2)n + n^2 \geq n^2 + n \geq n^2$ dla $n > 0$. Zatem jeśli $m > 0$, to niech $N = \lceil \sqrt{m} + 1 \rceil$, to jeśli $n > N$, to $m \leq n^2 \leq b_n$.

c) $c_n = n^3 - n - 1$

Oczywiście $c_n \leq n^2(n-1) - 1 \leq (n-1)^3 - 1$, dla $n > 0$. Zatem jeśli $m > 0$, niech $N = \lceil \sqrt[3]{m+1} + 1 \rceil$. Wtedy, jeśli $n > N$, to $m \leq (n-1)^3 - 1 \leq c_n$.