

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 7.

30 października 2020

1. Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej:

a) $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=0}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\forall n \in \mathbb{N} 3|n^3 + 2n$

2. Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb F_n o takiej własności, że $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Udowodnij korzystając z indukcji matematycznej, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

3. Podać przykład zbioru liczb, w którym jest liczba najmniejsza, nie ma liczby największej, lecz zbiór jest ograniczony z góry. Podać kres górny i dolny tego zbioru. Który z nich należy do zbioru?

4. Wykazać, że zbiór $\{(-1)^n \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$ jest nieograniczony.

5. Oblicz kres górny i dolny (o ile istnieją) zbioru:

a) $\left\{ \frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

b) $\left\{ 2 - \frac{1}{k+1} : k \in \mathbb{N} \right\}$

c) $\left\{ 1 + \frac{(-1)^k}{k+1} : k \in \mathbb{N} \right\}$

d) $\left\{ \frac{i}{i+1} : i \in \mathbb{N} \right\}$

e) $\left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

f) $\left\{ \frac{(i+1)^2}{2^i} : i \in \mathbb{N} \right\}$

g) $\emptyset$

h) $\{x^2 : x \in [-2, 3]\}$

i) $\{xy : x \in [-1, 4), y \in (-3, 2]\}$

6. Znaleźć dwa rozłączne zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$, takie że $\sup A = \sup B$ oraz $\inf A = \inf B$.

7. Liczby rzeczywiste spełniają tzw. aksjomat ciągłości – mianowicie każdy ich podzbiór ograniczony z góry ma kres górny. Pokaż, jak z aksjomatu ciągłości wynika, że każdy zbiór liczb rzeczywistych ograniczony z dołu ma kres dolny.

8. Pokaż, że liczby wymierne nie spełniają aksjomatu ciągłości – nie każdy ich podzbiór ograniczony z góry ma wymierny kres górny.