

Matematyka 0 WCh, 2020/2021
ćwiczenia 7. – rozwiązania lub wskazówki

30 października 2020

1. Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej:

a) $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=0}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$

Pierwszy krok dla $n = 0$. $0 = 0$, ok.

Drugi krok. Załóżmy, że $1 + \dots + k = \frac{(k+1)(k)}{2}$. Teza: $1 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$. Rzeczywiście korzystając z założenia: $1 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$. OK. $\square$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pierwszy krok $n = 0$. $0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0$, ok.

Drugi krok. Załóżmy, że $1 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Teza: $1 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Korzystając z założenia: $1 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2+k)+6(k+1)(k+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$. OK. $\square$

c) $\forall n \in \mathbb{N} 3|n^3 + 2n$

Pierwszy krok, dla $n = 0, 3|0$, ok.

Drugi krok. Załóżmy, że $3|k^3 + 2k$. Teza: $3|(k+1)^3 + 2(k+1)$. Niech zatem $k^3 + 2k = 3a$. Zatem $(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3 = 3(a + k^2 + k + 1)$ jest podzielne przez 3. $\square$

2. Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb F_n o takiej własności, że $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Udowodnij korzystając z indukcji matematycznej, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Sprawdzamy pierwszy krok indukcyjny: $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 = F_0$. Jest.

W przypadku kroku indukcyjnego tak naprawdę musimy rozważyć dwa przypadki, ponieważ wzór indukcyjny nie opisuje zachowania F_1 , czyli przypadek $k = 1$ musimy rozpatrzyć osobno. Sprawdzamy najpierw ten przypadek: $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1 = F_1$, działa.

To teraz załóżmy, że wzór działa dla $n \leq k > 1$. I udowodnimy, że jest też tak dla $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k = F_{k-1} + F_k. \end{aligned}$$

Zgadza się! $\square$

3. Podać przykład zbioru liczb, w którym jest liczba najmniejsza, nie ma liczby największej, lecz zbiór jest ograniczony z góry. Podać kres górny i dolny tego zbioru. Który z nich należy do zbioru?

Na przykład przedział $A = [0, 1)$. $\sup A = 1$, $\inf A = 0$, $\inf A \in A$, $\sup A \notin A$.

4. Wykazać, że zbiór $\{(-1)^n \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$ jest nieograniczony.

Niech $A = \{(-1)^n \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$. Załóżmy przeciwnie, że istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że jeśli $x \in A$, to $x \leq M$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $n > M$. Wtedy $2n > M$ oraz $(-1)^{2n} \cdot 2n = 2n > M$ ale $2n \in A$ – co daje sprzeczność. Zatem A nie jest ograniczony z góry.

Podobnie załóżmy przeciwnie, że istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że jeśli $x \in A$, to $x \geq M$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $n > -M$. Wtedy $2n + 1 > -M$ oraz $(-1)^{2n+1} \cdot (2n + 1) = -2n - 1 < M$ ale $-2n - 1 \in A$ – co daje sprzeczność. Zatem A nie jest ograniczony z dołu.

5. Oblicz kres górny i dolny (o ile istnieją) zbioru:

a) $\{\frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\sup A = 1$. Rzeczywiście, jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $\frac{1}{3^n} \leq 1$, bo $3^n \geq 1$. Z drugiej strony $3^0 = 1$, a zatem 1 jest największym elementem zbioru A , a zatem jest jego kresem górnym.

$\inf A = 0$. Rzeczywiście, jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $\frac{1}{3^n} \geq 0$, bo $1 > 0$. Więc 0 jest ograniczeniem dolnym tego zbioru. Jeśli natomiast $x > 0$, to niech $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą naturalną taką, że $n > \log_3(\frac{1}{x})$. Wtedy $\frac{1}{x} < 3^n$, czyli $\frac{1}{3^n} < x$, czyli x nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A . A zatem 0 jest największym ograniczeniem dolnym, czyli kresem dolnym.

b) $\{2 - \frac{1}{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$

$\sup B = 2$. Rzeczywiście, jeśli $k \in \mathbb{N}$, to $2 - \frac{1}{k+1} \leq 2$, bowiem $\frac{1}{k+1} \geq 0$. Czyli 2 jest ograniczeniem górnym. Tymczasem, jeśli $x < 2$, to niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $n > \frac{1}{2-x}$. Wtedy $\frac{1}{n+1} < 2 - x$, a zatem $x < 2 - \frac{1}{n}$, czyli x nie jest ograniczeniem górnym, a zatem rzeczywiście 2 to kres górny.

$\inf B = 1$. Rzeczywiście dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $2 - \frac{1}{k+1} \geq 1$, bowiem $\frac{1}{k+1} \leq 1$. Także $2 - \frac{1}{0+1} = 1$, a zatem 1 jest najmniejszym elementem badanego zbioru, a zatem jest jego kresem dolnym.

c) $\{1 + \frac{(-1)^k}{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$

$\sup C = 2$. Rzeczywiście dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $1 + \frac{(-1)^k}{k+1} \leq 2$, bowiem $\frac{(-1)^k}{k+1} \leq \frac{1}{k+1} \leq 1$. Co więcej $1 + \frac{(-1)^0}{0+1} = 2$, a zatem 2 to największy element, a zatem kres górny badanego zbioru.

$\inf C = \frac{1}{2}$. Zauważmy, że jeśli k jest parzyste, to $1 + \frac{(-1)^k}{k+1} > 1 > \frac{1}{2}$. Tymczasem jeśli k jest nieparzyste (a zatem w szczególności $k \geq 1$), to $1 + \frac{(-1)^k}{k+1} \geq 1 - \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2}$, bo dla $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$. Ponieważ $1 + \frac{(-1)^1}{1+1} = \frac{1}{2}$, to $\frac{1}{2}$ jest najmniejszym elementem badanego zbioru, a zatem jest jego infimum.

d) $\{\frac{i}{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$

$\sup D = 1$. Rzeczywiście dla $i \in \mathbb{N}$, mamy $\frac{i}{i+1} \leq 1$, bowiem $i + 1 \geq i$. Czyli 1 jest ograniczeniem górnym badanego zbioru. Jeśli natomiast $x < 1$, to niech $i \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $i > \frac{1}{1-x}$. Wtedy $\frac{i}{i+1} = 1 - \frac{1}{i+1} > x$, a zatem 1 jest najmniejszym ograniczeniem górnym, czyli supremum badanego zbioru.

$\inf D = 0$. Oczywiście dla każdego $i \in \mathbb{N}$ mamy $0 \leq \frac{i}{i+1}$. Jednocześnie $\frac{0}{0+1} = 0$ jest zatem najmniejszym elementem tego zbioru, czyli jest infimum.

e) $\{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

$\sup E = 1$. Zauważmy bowiem, że jeśli n jest parzyste, to $(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$. Jeśli natomiast n jest nieparzyste, to $(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1} \leq 0$. Zatem 1 jest ograniczeniem górnym badanego zbioru. Jeśli natomiast $x < 1$, to niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $n > \frac{1}{1-x}$. Wtedy także $2n + 1 > \frac{1}{1-x}$, a zatem $(-1)^{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} > x$, a zatem 1 jest najmniejszym ograniczeniem górnym tego zbioru, czyli jego kresem górnym.

$\inf E = -1$. Zauważmy bowiem, że jeśli n jest parzyste, to $(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 0$. Jeśli natomiast n jest nieparzyste, to $(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1} \geq -1$. Zatem -1 jest ograniczeniem dolnym badanego zbioru. Jeśli natomiast $x > -1$, to niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $n > \frac{1}{x+1}$, a zatem $(-1)^{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = -1 + \frac{1}{2n+2} < x$, a zatem -1 jest największym ograniczeniem dolnym tego zbioru, czyli jego kresem dolnym.

f) $\{\frac{(i+1)^2}{2^i} : i \in \mathbb{N}\}$

$\sup F = \frac{9}{4}$. Jest tak, bowiem ciąg elementów tworzących ten zbiór rozpoczyna się następująco: $1 < \frac{4}{2} < \frac{9}{4} > \frac{16}{8} > \frac{25}{16} > \frac{36}{32} > \frac{49}{64}$. Łatwo udowodnić np. przez indukcję, że dla $i > 5$ $2^i > (i+1)^2$, zatem $\frac{(i+1)^2}{2^i} < 1$.

Zatem $\frac{9}{4}$ jest największym elementem badanego zbioru, a więc też jego supremum.
 $\inf F = 0$. Niby jasne, ale spróbujmy to dokładniej udowodnić. Na pewno 0 jest ograniczeniem dolnym.
 Zauważmy, że $\frac{(i+2)^2}{2^{i+1}} = \frac{(i+2)^2}{2(i+1)^2} = \frac{1+\frac{4}{i}+\frac{4}{i^2}}{2+\frac{4}{i}+\frac{2}{i^2}}$. Jeśli $i > 16$ to na pewno ten ułamek jest mniejszy niż $\frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$. A
 zatem dla $i > 16$, $\frac{(i+1)^2}{2^i} < \frac{17^2}{2^{16}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-16}$. Niech $x > 0$. Istnieje zatem $i \in \mathbb{N}$, $i > 16 + \log_{\frac{4}{3}} \frac{17^2}{x \cdot 2^{16}}$. Ale wtedy
 $\left(\frac{4}{3}\right)^{i-16} > \frac{17^2}{x \cdot 2^{16}}$, a zatem $x > \frac{17^2}{2^{16}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-16} > \frac{(i+1)^2}{2^i}$, czyli x nie jest ograniczeniem dolnym, a więc 0 jest
 największym ograniczeniem dolnym, czyli kresem dolnym.

g) $\emptyset$

$\sup \emptyset = -\infty$. Ponieważ każda liczba rzeczywista jest większa od każdego elementu zbioru pustego (warunek spełniony w próżni).

$\inf \emptyset = \infty$. Podobnie jak wyżej.

h) $\{x^2: x \in [-2, 3]\}$

Oczywiście, jeśli $x \in [-2, 3]$, to $x^2 \in [0, 9]$, zatem $\sup J = 9$ oraz $\inf J = 0$.

i) $\{xy: x \in [-1, 4], y \in (-3, 2]\}$

Zauważmy, że $\{xy: x \in [-1, 4], y \in (-3, 2]\} = \{xy: x \in [-1, 0), y \in (-3, 0)\} \cup \{xy: x \in [-1, 0), y \in [0, 2]\} \cup$
 $\{xy: x \in [0, 4], y \in (-3, 0)\} \cup \{xy: x \in [0, 4], y \in (0, 2]\} = (0, 3) \cup [-2, 0] \cup (-12, 0] \cup [0, 8] = (-12, 8)$, a
 zatem $\sup K = 8$ oraz $\inf K = -12$.

6. Znaleźć dwa rozłączne zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$, takie że $\sup A = \sup B$ oraz $\inf A = \inf B$.

Na przykład: $A = \{\frac{1}{2n+1}: n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{2n+1}: n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{1}{2n+2}: n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{2n+2}: n \in \mathbb{N}\}$. $\inf A = \inf B = 0$, $\sup A = \sup B = 2$

7. Liczby rzeczywiste spełniają tzw. aksjomat ciągłości – mianowicie każdy ich podzbiór ograniczony z góry ma kres górny. Pokaż, jak z aksjomatu ciągłości wynika, że każdy zbiór liczb rzeczywistych ograniczony z dołu ma kres dolny.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym z dołu. Niech B będzie zbiorem jego wszystkich ograniczeń dolnych. Zbiór B jest ograniczony z góry, bo każdy element zbioru A ogranicza B z góry. Zatem ma kres górny. Niech $b = \sup B$. Liczba b jest ograniczeniem dolnym zbioru A , bowiem, jeśli istnieje $a \in A$, takie, że $b > a$, to a jest ograniczeniem górnym zbioru B mniejszym od jego supremum, co jest niemożliwe. Z drugiej strony b jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A , bowiem jeśli $b' > b$ byłoby ograniczeniem dolnym zbioru A , to $b' \in B$ byłoby elementem zbioru B większym od jego supremum, co jest także niemożliwe. Zatem $b = \inf A$. $\square$

8. Pokaż, że liczby wymierne nie spełniają aksjomatu ciągłości – nie każdy ich podzbiór ograniczony z góry ma wymierny kres górny.

Niech na przykład $A = \{q \in \mathbb{Q}: q < \sqrt{2}\}$. Oczywiście $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$