

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 6. – rozwiązania lub wskazówki

27 października 2020

Zadania pochodzą z list M. Chałupnika i M. Krycha.

1. Rozwiązać nierówność oraz zilustrować rozwiązanie na kole:

a) $\sin x > \cos x$,

Wskazówka: powyżej prostej $b = a$.

b) $8\sin^4 t - 10\sin^2 t + 3 < 0$,

Jeśli $x = \sin^2 t$, to mamy $8x^2 - 10x + 3 < 0$, zatem $1/2 < x < 3/4$, zatem $\sqrt{2}/2 < \sin t < \sqrt{3}/2$ lub $-\sqrt{3}/2 < \sin t < -\sqrt{2}/2$, czemu na kole jednostkowym odpowiadają przedziały kątów $(\pi/4, \pi/3)$, $(2\pi/3, 3\pi/4)$, $(5\pi/4, 4\pi/3)$ i $(5\pi/3, 7\pi/7)$.

c) $3\operatorname{tg}^4 t - 10\operatorname{tg}^2 t + 3 > 0$,

Niech $x = \operatorname{tg}^2 t$, zatem $3x^2 - 10x + 3 > 0$. Zatem $x < 1/3$ lub $x > 3$, czyli $\operatorname{tg} t \in (-\infty, \sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}/3, \sqrt{33}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, czemu na kole jednostkowym odpowiadają przedziały $(-\pi/6, \pi/6)$, $(\pi/3, \pi/2)$, $(\pi/2, 4\pi/6)$, $(5\pi/6, 7\pi/6)$, $(4\pi/3, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 10\pi/6)$.

d) $\sin t > \sin(t + \pi/3)$.

Wskazówka: kiedy y -owa współrzędna się zmniejsza przy obrocie o $\pi/3$?

2. Przyjmując $\pi \simeq 3,14$ i zakładając, że Ziemia jest kulą i równik ma 40000 km, obliczyć długość równoleżnika 30° .

Jeśli R to promień Ziemi to promień równoleżnika 30° to $R \cos \pi/6$, czyli $R\sqrt{3}/3$, zatem obwód to $2\pi R\sqrt{3}/3$. Za to $R = 40000/(2\pi)$, zatem szukana długość to $20000\sqrt{3}$.

3. Stojąc na równiku przeszliśmy 10km na północ, 10km na wschód, 10km na południe i w końcu 10km na zachód. Czy znaleźliśmy się w początkowej pozycji?

Nie, ponieważ równoleżnik po którym idziemy na wschód jest krótszy niż równik, czyli pokonując na nim 10km pokonamy więcej stopni długość geograficznej niż przechodząc 10km na równiku. Zatem w końcowym punkcie będziemy na wschód od początkowego punktu.

4. Obliczyć $\arcsin(\sin \pi)$.

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin 0 = 0.$$

5. Wykazać, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ oraz znaleźć $\cos 15^\circ$.

Rzeczywiście, jeśli $x = \sin 15^\circ$, to $1/2 = \sin 30^\circ = 2(x\sqrt{1 - x^2})$, zatem $1 = 16x^2(1 - x^2)$. Zatem $x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$. Ale jasne jest, że skoro $x < 1/2$, to trzeba wybrać mniejsze z tych dwóch rozwiązań, zatem rzeczywiście $x = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

$$\cos 15^\circ = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

6. Rozwiązać równanie $x^2 - 4x - \sin \frac{\pi x}{2} = 0$.

Zatem $x^2 - 4x = \sin \frac{\pi x}{2}$. Jest intuicyjnie jasne, że wykresy paraboli i funkcji $\sin$ mogą przeciąć dwa razy. Te dwa rozwiązania można zgadnąć, bo wtedy obie strony równania się zerują i $x = 0$ lub $x = 4$.

7. Znaleźć sumę $\log(\operatorname{tg} 1^\circ) + \log(\operatorname{tg} 2^\circ) + \dots + \log(\operatorname{tg} 88^\circ) + \log(\operatorname{tg} 89^\circ)$.

$\log(\operatorname{tg} 1^\circ) + \log(\operatorname{tg} 2^\circ) + \dots + \log(\operatorname{tg} 88^\circ) + \log(\operatorname{tg} 89^\circ) = \log(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) = \log 1 = 0$. Przedostatnia równość wynika z tego, że $\operatorname{tg} n^\circ = 1/\operatorname{tg}(90 - n)^\circ$.