

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 2. – rozwiązania lub wskazówki

19 października 2020

Zadania pochodzą z list M. Chałupnika i M. Krycha.

1. Rozwiązać równanie kwadratowe sprowadzając trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej.

- a) $x^2 + 3x + 2 = 0$,
 $(x + 3/2)^2 - 1/4 = 0$, $x + 3/2 = \pm 1/2$, $x = -1$ lub $x = -2$.
- b) $x^2 - 4x + 3 = 0$,
 $(x - 2)^2 - 1 = 0$, $x - 2 = \pm 1$, więc $x = 1$ lub $x = 3$.
- c) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$,
 $(x + 3/2)^2 = 0$, więc $x = -3/2$.
- d) $-2x^2 + 3x - \frac{9}{8} = 0$.
 $-2(x - 3/4)^2 = 0$, więc $x = 3/4$.

2. Napisać wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu $f(x) = x^2 - 5x + 6$ względem:

- a) osi x ,
 $f(x) = -(x^2 - 5x + 6) = -x^2 + 5x - 6$.
- b) osi y , $f(x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6$.
- c) punktu $(0, 0)$,
 $f(x) = -(x^2 + 5x + 6) = -x^2 - 5x - 6$.
- d) prostej $y = -2$.
Zatem $y \mapsto -y - 4$. Czyli $f(x) = -(x^2 - 5x + 6) + 4 = x^2 + 5x - 2$.

3. Znaleźć odległość punktu $(1, 1)$ od prostej $2x - 3y + 5 = 0$.

Mamy $y = \frac{2x+5}{3}$, więc odległość dla danego x jest dana jako

$$\sqrt{(x-1)^2 + (2x+5-3)^2/9}$$

Czyli musimy znaleźć minimum wyrażenia $(x-1)^2 + (2x+2)^2/9 = (13x^2 - 10x + 13)/9$, co osiąga minimum dla $x = 5/13$ i wynosi ono $16/13$, zatem szukana odległość to $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

4. Rozwiązać równanie $|x^2 - 6x + 8| = 1$ i narysować wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$.

Sprowadza się to do równania $x^2 - 6x + 8 = pm1$. W pierwszym przypadku jest to równanie $x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2 = 0$, zatem $x = 3 \pm \sqrt{2}$. W drugim przypadku mamy $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$, zatem $x = 3$. Aby narysować wykres warto jeszcze znaleźć pierwiastki oryginalnego wyrażenia $x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1 = 0$ i zatem te pierwiastki to 2 i 4.

5. Rozwiązać nierówność $|2x - 4| - |x + 1| \geq 1$ i narysować wykres funkcji $f(x) = |2x - 4| - |x + 1|$.

Można rozważyć trzy przypadki:

- $x < -1$, wtedy chcemy by $-2x + 4 + (x + 1) = -x + 5 \geq 1$, zatem $x \leq 4$, więc na całej tej półprostej wyrażenie jest spełnione.
- $-1 \leq x < 2$, wtedy chcemy by $-2x + 4 - x - 1 = -3x + 3 \geq 1$, zatem $3x \leq 2$, czyli $x \leq 2/3$, co daje przedział $[-1, 2/3]$.

- $x \geq 2$, to $2x - 4 - x - 1 = x - 5 \geq 1$, zatem $x \geq 6$.

Zatem $x \in (-\infty, 2/3] \cup [6, \infty)$.

Wykres można narysować używając wyliczonych prostych.

6. Znaleźć:

a) prostą w $\mathbb{R}^2$ przechodzącą przez punkty $(2, 3), (5, 8)$.

Jasne, że prosta nie jest pionowa, więc ma wzór $y = ax + b$. Mamy więc $3 = 2a + b$ oraz $8 = 5a + b$. Zatem $b = 3 - 2a$ i $8 = 5a + 3 - 2a$, więc $a = 5/3$ oraz $b = -1/3$.

b) znaleźć parabolę przechodzącą przez punkty $(-2, 4), (2, 3), (5, 8)$.

Wskazówka: podobnie jak wyżej, rozwiąż odpowiedni układ równań.

c) zastanowić się nad ogólnym schematem (dowolna liczba punktów, dowolny stopień wielomianu).

7. Znaleźć równanie kwadratowe o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są liczby $1 + \sqrt{3}$ i $1 - \sqrt{3}$. Czy istnieje równanie kwadratowe o współczynnikach całkowitych, którego rozwiązaniami są liczby $1 + \sqrt{3}$ i $2 - \sqrt{3}$?

Mamy $(x - 1)^2 - 3 = 0$, więc $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Średnia z tych dwóch to $3/2 = -b/(2a)$, zatem $\sqrt{\Delta} = 1/2 - \sqrt{3}$, a więc $\Delta = (1/2 - \sqrt{3})^2$, co nie jest liczbą całkowitą, więc współczynniki tego wielomianu nie mogą być całkowite.

8. Odgadnąć pierwiastki równania kwadratowego:

(a) $x^2 - 3x + 2 = 0$,

1, 2.

(b) $x^2 + 4x + 4 = 0$,

-2.

(c) $x^2 - 6x + 8 = 0$,

2, 4.

(d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

1, 2/3.

9. Niech $w(x)$ będzie wielomianem 3. stopnia spełniającym warunki: $w(0) = -1, w(1) = 3, w(2) = 7, w(-1) = -5$. Znaleźć współczynniki wielomianu $w(x)$.

Niech $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Z pierwszej tożsamości wiadomo, że $d = -1$. Pozostałe równości dają nam następujący układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 8a + 4b + 2c = 8 \\ -a + b - c = -4 \end{cases},$$

który to układ łatwo rozwiązać dostając $a = 0, b = 0, c = 4$, czyli mamy do czynienia z wielomianem $4x - 1$. Nie jest to jednak wielomian trzeciego stopnia.