Matematyka 0 WCh, 2020/2021
ćwiczenia 13. – rozwiązania

13 listopada 2020

1. Znajdź granicę ciągu

   a) $a_n = \sqrt{2 + \frac{\sin n!}{n}}$.

   Granica ciągu pod pierwiastkiem to 2, bo ciąg $\sin n! \cdot 1/n$ to iloczyn ciągu ograniczonego i zbieżnego do zera, więc zbiega do zera. Zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ (tutaj trochę korzystamy z tego, że pierwiastek ciągu zbieżnego jest zbieżny i to do granicy będącej pierwiastkiem oryginalnej granicy. Stanie się to jasne wkrótce, a póki co warto się zastanowić, dlaczego tak musi być.)

   b) $b_n = \sqrt{n + 12\sqrt{n}} - \sqrt{n + 31}$.

   $$b_n = \sqrt{n + 12\sqrt{n}} - \sqrt{n + 31} = \frac{12\sqrt{n} - 31}{\sqrt{n + 12\sqrt{n}} + \sqrt{n + 31}} = \frac{12 - 31/\sqrt{n}}{\sqrt{1 + 12/\sqrt{n}} + \sqrt{1 + 31/n}},$$

   gdzie licznik dąży do 12, a mianownik do 2, więc $\lim_{n\to\infty} b_n = 6$,

   c) $c_n = \sqrt[n]{1^7 + 2^7 + \ldots + n^7}$.

   Mamy $\sqrt[n]{n^7} \le c_n \le \sqrt[n]{n \cdot n^7}$, ale $\sqrt[n]{n^7} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^7 \to 1^7 = 1$ i podobnie ciąg ograniczający zadany ciąg z góry. Zatem $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ z tw. o trzech ciągach.

   d) $d_n = \dfrac{1^3 + \ldots + n^3}{n^4}$. Wskazówka: skorzystaj za zadania 6 z ćwiczeń 11.

   Możemy się tu powołać na Tw. Stolza, udowodnione w zadaniu 6 z ćwiczeń 11. Mówi ono, że że jeśli $y_n \to \infty$ jest ciągiem ściśle rosnącym oraz x_n jest dowolnym ciągiem, to

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

   o ile tylko granica po prawej stronie istnieje i jest skończona.

   Zatem biorąc $x_n = 1^3 + \ldots + n^3$ oraz $y_n = n^4$ dostajemy do sprawdzenia granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4} = \frac{1}{4}$ i do takiej granicy dąży też badany ciąg.

   e) $e_n = \left(0,9 + \frac{1}{n}\right)^n$,

   $$e_n = \left(1 + \frac{1/0,9}{n}\right)^n \cdot (0,9)^n \to e^{10/9} \cdot 0 = 0.$$

   f) $f_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   $$f_n = \frac{n!}{n^n} \le \frac{1 \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n} \to 0,$$

   więc $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

   g) $g_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$.

   Wskazówka: zauważ, że jest to iloczyn ciągu ograniczonego i zbieżnego do zera.

   h) $h_n = \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$.

   Wskazówka: wyciągnij przed nawias n^2 w liczniku i mianowniku.

i) $i_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.
Wskazówka: Wyciągnij n przed nawias w liczniku i mianowniku.

j) $j_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$.
Wskazówka: $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

k) $k_n = \dfrac{3^n + 7^n}{2 \cdot 7^n + 4^n}$.
Wskazówka: wyciągnij przed nawias 7^n.

l) $l_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5}$.
Wskazówka: skorzystaj z tw. o trzech ciągach. Możesz wymyślić oszacowanie, które działa od $n = 2$.

2. Niech $x_1 = 4$ oraz $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 2$. Udowodnij, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.
Wskazówka: wykaż przez indukcję, że $x_n < 6$, a na tej podstawie udowodnij, że ciąg jest rosnący. Więc jest zbieżny, a granica spełnia równanie $g = \frac{2}{3}g + 2$.