

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 12. – rozwiązania

10 listopada 2020

1. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ korzystając z definicji zbieżności ciągu.

Niech $\varepsilon > 0$, mamy $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$, jeśli $n > n(1 - \varepsilon) + 1 - \varepsilon$, zatem gdy $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, zatem dla np. $N = \lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \rceil$, mamy, że dla każdego $n > N$, $\frac{n}{n+1} \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

2. Udowodnij, że każdy ciąg rosnący i ograniczony ma (skończoną) granicę.

Zbiór $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony, a więc istnieje $\sup X = g$. Dowiedzimy, że g jest granicą. Rzeczywiście, dla każdego ε , istnieje N , że $x_N > g - \varepsilon$, bo inaczej $g - \varepsilon$ byłoby ograniczeniem górnym X , mniejszym od kresu górnego. A skoro x_n jest rosnący, to dla każdego $n > N$ mamy $x_n > g - \varepsilon$ (i jednocześnie oczywiście $x_n \leq g < g + \varepsilon$, co dowodzi tezy).

3. Udowodnij, że ciąg $a_1 = \sqrt{c}$, $a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$, $a_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}$, ..., $c > 0$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

Mamy: $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Oczywiście ten ciąg jest rosnący. Jest też ograniczony przez liczbę $\sqrt{c} + 1$, co można wykazać przez indukcję.

Niech g będzie jego granicą. Dostajemy $g = \sqrt{c + g}$, zatem $g^2 - g + c = 0$. Zauważmy, że interesuje nas tylko dodatnie rozwiązanie, zatem $g = \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$.

4. Znajdź granice ciągu $b_n = \sqrt[n]{2019^n + 2020^n}$.

Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia o 3. ciągach.

5. Korzystając z tego, że $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$, oblicz liczbę e z dokładnością do 2 miejsc po przecinku (wolno używać kalkulatora).

Wskazówka: wystarczy policzyć do wyrazu $1/5!$.

6. Podaj przykład ciągu, który nie jest zbieżny, który ma podciąg zbieżny.

$$(-1)^n$$

7. Udowodnij, że w każdym ciągu ograniczonym można znaleźć podciąg zbieżny.

Wskazówka: skoro $x_n \in [-m, m]$ dla każdego n , to w co najmniej jednym z przedziałów $[-m, 0]$ i $[0, m]$ znajdzie się nieskończony podciąg.

8. Wykazać, że ciąg a_n jest zbieżny i znaleźć jego granicę, gdzie:

a) $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$,

Zauważ, że ten ciąg jest rosnący i mniejszy od 1. Rzeczywiście, $a_1 < 2$ oraz $a_{n+1} = a_n(2 - a_n) = 2a_n - a_n^2 > a_n$, bowiem $2 - a_n > 0$ oraz $2a_n - a_n^2 < 1$, bowiem $a_n^2 - 2a_n + 2 = (a_n - 1)^2 > 0$, zatem ma granicę.

Wtedy niech g będzie tą granicą i mamy $g = g(2 - g)$, a skoro $g > 0$ to $g = 1$.

b) $a_1 = 1/10$, $a_{n+1} = \sin a_n$.

Zauważamy, że dla $x > 0$, $\sin x < x$. Wobec tego $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$, czyli ten ciąg jest malejący. Przez indukcję z łatwością dowodzimy, że $a_n > 0$, zatem ten ciąg ma granicę. Mamy $g = \sin g$ (to wynika z ciągłości funkcji $\sin$, ale o tym jeszcze kiedyś pogadamy), zatem $g = 0$.

9. Niech $a_1 = c$, $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$. Dla jakich wartości c , ciąg a_n ma skończoną granicę?

Zauważmy, że ten ciąg jest rosnący dla $c \in (0, 1)$ ten ciąg jest rosnący i mniejszy niż 1, więc ma granicę. Dla $c = 1$ mamy ciąg stale równy 1, więc też ma granicę.

Dla $c > 1$ ten ciąg nadal od drugiego wyrazu będzie < 1 , więc jeśli będzie dodatni, to jesteśmy w tym samym przypadku, a będzie dodatni dla $c \in (1, 2)$. Dla $c = 2$ lub $c = 0$, od drugiego wyrazu ciąg jest równy zero, więc też ma granicę.

Dla $c < 0$ ten ciąg będzie rozbiegał do $-\infty$, bowiem $a_{n+1} \leq c2^n$. Rzeczywiście $a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \leq 2a_n$ (skoro a_n jest < 0). A skoro ciąg dla $c > 2$ od drugiego miejsca jest ujemny, to w tym przypadku będzie tak samo. Podsumowując, ciąg jest zbieżny dla $c \in [0, 2]$.