

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 11. – rozwiązania

9 listopada 2020

1. Niech s_n będzie sumą pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego $a_n = aq^n$, gdzie $|q| < 1$. Oblicz granicę ciągu s_n .

Mamy $s_n = a + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q) + a^2(1-q) + \dots + a^n(1-q)}{1-q} = \frac{a-aq^n}{1-q} \rightarrow \frac{a}{1-q}$, bowiem $q^n \rightarrow 0$.

2. Znajdując odpowiedni ciąg i jego granicę, udowodnić wzór na objętość ostrosłupa trójkątnego o polu podstawy P i wysokości h .

Podzielmy ostrosłup na n klocek o równej wysokości równoległe do podstawy. Każdy klocek ma podstawy w postaci trójkątów, i każdy zawiera graniastosłup o podstawie równej górnej podstawie, a jest zawarty w graniastosłupie o dolnej podstawie. Różnica tych objętości to $Ph/n \rightarrow 0$ ze wzrostem n , zatem objętość ostrosłupa, jest granicą (dowolnego z tych dwóch) ciągów objętości ustawionych na sobie graniastosłupów.

Pola powierzchni kolejnych trójkątnych przekrojów to

$$0, P/n^2, 2^2 P/n^2, \dots, P^2,$$

zatem objętość zewnętrznych graniastosłupów to:

$$(P/n^2 + 2^2 P/n^2 + \dots + P^2) \frac{h}{n} = Ph \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \rightarrow Ph/3.$$

3. Obliczyć pole pod wykresem funkcji $y = 1/x^2$ na przedziale $[1, 2]$.

Weźmy ciąg przedziałów $\{(1 + k/n, 1 + (k+1)/n) : k \in \{0, \dots, n-1\}\}$. W przedziale $(1 + k/n, 1 + (k+1)/n)$ i punkt $\sqrt{(1 + k/n)(1 + (k+1)/n)}$. Szukane pole to granica sumy pól prostokątów.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1 + k/n)(1 + (k+1)/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + k/n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + (k+1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. Udowodnić wzór na pole koła o promieniu r , zakładając, że obwód to $2\pi r$ i obliczając granicę odpowiedniego ciągu.

Wskazówka: rozważ wielokąty wpisane w to koło lub opisane na tym kole i policz pole każdego z nich dzieląc je na trójkąty o wspólnym wierzchołku w środku koła.

5. Znajdź granicę ciągu:

a) $a_n = (n+1)^k - n^k$, gdzie $k \in (0, 1)$.

$$(n+1)^k - n^k = n^k \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^k - 1 \right) \leq n^k \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) = n^{k-1} \rightarrow 0, \text{ zatem } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

b) $b_n = \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

Wskazówka: skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia mnożąc licznik i mianownik przez odpowiednie wyrażenie. Następnie wyciągnij w liczniku i mianowniku $\sqrt{n}$ przed nawias.

c) $c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$,

Wyciągnij n przed pierwiastek w mianowniku.

d) $d_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$,

Wyciągnij n przed pierwiastek w mianowniku.

e) $e_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$

Użyj poprzednich dwóch ciągów korzystając z tw. o trzech ciągach!

f) $f_n = \frac{\log_a n}{n}, a > 1.$

Zauważmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy od pewnego N , $n > N$, $\sqrt[n]{N} < a^\varepsilon$, bowiem $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Zatem $\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$, co z definicji daje, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

6. Udowodnij, że jeśli $y_n \rightarrow \infty$ jest ciągiem ściśle rosnącym oraz x_n jest dowolnym ciągiem, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

o ile tylko granica po prawej stronie istnieje i jest skończona.

Założmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = g$$

Zatem dla każdego ε , dla pewnego N i każdego $n > N$ mamy

$$g - \varepsilon/2 < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < g + \varepsilon/2,$$

zatem do tego przedziału należą wszystkie ułamki postaci:

$$\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

i mają dodatnie mianowniki.

Zatem ułamek

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N},$$

którego licznik i mianownik to suma odpowiednio liczników i mianowników też leży w tym przedziale (wyjaśnij dlaczego na przykładzie dwóch ułamków!).

Ale wtedy

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - g \right| = \left| \frac{x_N - ly_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n} \right) \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - g \right) \right| \leq \left| \frac{x_N - ly_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - g \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

gdzie ostatnia nierówność zachodzi dla dostatecznie dużych n .

7. Udowodnij, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ to również $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$, gdzie

$$b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Wskazówka: przyjmij $x_n = a_1 + \dots + a_n$ oraz $y_n = n$ i zastosuj tezę poprzedniego zadania.