

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 10. – rozwiązania lub wskazówki

6 listopada 2020

1. Korzystając z wzoru dwumianowego Newtona, udowodnij, że dla dowolnej liczby $c > 1$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = 0$.

Rzeczywiście, niech $d = c - 1 > 0$. Zatem

$$c^n = (1 + d)^n \geq 1 + nd + \frac{n(n-1)d^2}{2} \geq \frac{n(n-1)d^2}{2}.$$

Zatem

$$0 \leq \frac{n}{c^n} \leq \frac{2}{d^2 \cdot (n-1)}$$

co z twierdzenia o trzech ciągach daje, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = 0$.

2. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, dla dowolnych $a > 1$ i $k \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że dla $k \leq 1$ mamy $\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n}{a^n}$, więc teza wynika od razu z poprzedniego zadania. Dla $k > 1$ możemy rozpatrzyć $\frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(a^{1/k})^n}\right)^k$ i zauważyć, że wewnątrz nawiasu zbiega do 0, zatem i cały ciąg zbiega do zera.

3. Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{n^4 - 7n + 5}{5n^4 + n + 2},$

Wskazówka: wyciągnij n^4 z licznika i mianownika!

b) $b_n = \frac{n^3 + 1000666}{n^4 - n - 700},$

Wskazówka: wyciągnij n^3 z licznika i mianownika!

c) $c_n = \frac{-2n^4 + 17}{n^3 - 100n^2 + 7},$

Wskazówka: wyciągnij n^3 z licznika i mianownika!

d) $d_n = \frac{\sqrt{n^5 + n^2 + 7}}{\sqrt{n}(n^2 - 5)},$

$$d_n = \frac{n^{5/2} + n^2 + 7}{\sqrt{n^{5/2} - 5n^{1/2}}} = \frac{1 + n^{-1/2} + 7n^{-5/2}}{1 - 5n^{-2}} \rightarrow 1.$$

e) $e_n = \frac{\sin n}{n},$

Wskazówka: iloczyn ciągu ograniczonego i zbieżnego do zera.

f) $f_n = \frac{n^7 3^n + 5^n + \sin n}{5^n - n^3 + \cos n},$

$$f_n = \frac{n^7 3^n + 5^n + \sin n}{5^n - n^3 + \cos n} = \frac{n^7/(5/3)^n + 1 + \frac{\sin n}{5^n}}{1 - n^3/5^n + \frac{\cos n}{5^n}} \rightarrow 1,$$

bowiem $n^7/(5/3)^n$, $n^3/5^n$ dążą do zera na mocy poprzedniego zadania, zaś $\frac{\sin n}{5^n}$, $\frac{\cos n}{5^n}$ dążą do zera jako iloczyny ciągu ograniczonego i zbieżnego do zera.

g) $g_n = \sqrt{n+7} - \sqrt{n}$,
 $g_n = \frac{7}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$.

h) $h_n = \sqrt[n]{3}$,

Niech $a_n = h_n - 1$. Mamy $3 = h_n^n = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n$, zatem $0 \leq a_n \leq 2/n$, więc $a_n \rightarrow 0$, zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$.

i) $i_n = \sqrt[n]{5^n + 3^n}$,

$$5 \leq \sqrt[n]{5^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5,$$

zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = 5$, bowiem $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$.

j) $j_n = \frac{n!}{5^n}$,

$$\frac{n!}{5^n} \geq \frac{6^n}{5^n} \rightarrow \infty,$$

a nierówność $n! \geq 6^n$ zachodzi dla $n > 13$.

k) $k_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n+2}$,

$$\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n+2} = \left(\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n\right)^3 + \left(1 + \frac{5}{n}\right)^2 \rightarrow (e^5)^3 \cdot 1 = e^{15}.$$

l) $l_n = \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^n$,

Przenumerowując l_n otrzymamy ciąg

$$\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n / \left(1 - \frac{3}{n}\right) \rightarrow e^{-3}/1 = \frac{1}{e^3}.$$

m) $m_n = \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 5n + 7}\right)^n$,

$$\left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 5n + 7}\right)^n = \left(1 - \frac{6n + 4}{n^2 + 5n + 7}\right)^n = \left(1 - \frac{6}{n \frac{n+5+7/n}{n+4/6}}\right)^n \rightarrow e^6,$$

ponieważ

$$\left(1 - \frac{6}{n \frac{n+5+7/n}{n+4/6}}\right)^n \xrightarrow{n \frac{n+5+7/n}{n+4/6}} e^6$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 5 + 7/n}{n + 4/6} = 1.$$

n) $o_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$,

To jest podciąg ciągu $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ dla $m = n^2$, zatem zbiega do e .

o) $p_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

$$1 + \frac{n}{n^2} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{-1/n^2}{1+1/n^2}}\right)^n \leq \frac{1}{1 + \frac{-n/n^2}{1+1/n^2}},$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach $p_n \rightarrow 1$

4. Czy ciąg $a_n = \sin(n\pi/3)$ ma granicę?

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 6k, 6k + 3 \\ \sqrt{3}/3, & n = 6k + 1, n = 6k + 2 \\ -\sqrt{3}/3, & n = 6k + 4, n = 6k + 5 \end{cases}$$

Jest okresowy, ale nie stały, zatem nie ma granicy.

5. Podać przykłady ciągów a_n i b_n , takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, oraz:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \infty$,

Weźmy $a_n = 1$ oraz $b_n = 1/n$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = -\infty$,

Weźmy $a_n = 1$ oraz $b_n = -1/n$.

(c) ciąg a_n/b_n nie ma granicy.

Weźmy $a_n = 1$ oraz $b_n = (-1)^n/n$.