

Matematyka 0 WCh, 2020/2021

ćwiczenia 1. – rozwiązania lub wskazówki

16 października 2020

Zadania pochodzą z list M. Chałupnika i M. Krycha.

1. Pani Swietłana sprzedaje jagody, które zbiera w lasach w okolicy Prypeci. Kilogram jagód sprzedaje po 100 hrywien. Niestety pomiar wykazał, że zawartość jodu 131 w jagodach pani Swietłany wynosi 300% dopuszczalnej normy. W tej sytuacji pani Swietłana postanowiła kupić od koleżanki, pani Ludmiły, nieskażone jagody z Syberii, które kosztują 120 hrywien za kilogram, wymieszać je ze swoimi i sprzedać wszystko po 100 hrywien za kilogram (jak można przeczytać w książce Kate Brown „Czarnobyl. Instrukcje przetrwania” takie rozwiązanie stosuje wiele firm, również z Europy Zachodniej, handlujących żywnością). Ile jagód z Syberii pani Swietłana powinna dodać do kilograma swoich aby skażenie mieszanki nie przekraczało normy i ile w takim przypadku zarobi na kilogramie jagód?

Jeśli pani Swietłana weźmie swoje i kupione jagody w proporcji 1 : 2 to w jednym kilogramie będzie tylko $\frac{1}{3}$ jej jagód więc jód spadnie trzykrotnie – do wartości równej normie. Więc, aby sprzedać kilogram jagód musi dokupić $\frac{2}{3}$ kilograma. Czyli zarobi na nim $100 - 120 \cdot \frac{2}{3} = 20$ hrywien.

2. Pan Henio lubi pić wódkę (40%) pół na pół z Martini (15%). Jaka jest zawartość alkoholu w jego ulubionym drinku? Z kolei żona pana Henia, pani Grażyna, nie lubi drinków mocniejszych niż 20%. Jak pan Henio powinien dobrać proporcje, żeby zrobić żonie dobrego (tzn. ani za słabego, ani za mocnego) drinka?

Wynosi $(0,4 + 0,15)/2 = 0,275$, czyli 27,5%.

W drugim przypadku jeśli x to część drinku, która jest wódką, to $x \cdot 0,4 + (1 - x) \cdot 0,15 = 0,2$, zatem $x \cdot 0,25 = 0,05$, zatem $x = 0,2$, zatem wódki wlewa jej 20%, zaś martini 80%.

3. Niech $A = (1, -1, 2), B = (3, 7, -5)$. Znaleźć punkt $C \in \mathbb{R}^3$, który dzieli odcinek AB w proporcji:

a) 1 : 1.

$$\frac{1}{2}(1, -1, 2) + \frac{1}{2}(3, 7, -5) = (2, 3, -3/2).$$

b) 1 : 3.

Wskazówka: analogicznie. Odpowiedź: $(3/2, 1, 1/4)$.

c) 1 : 2.

Wskazówka: analogicznie. Odpowiedź: $(5/3, 5/3, -1/3)$.

d) 2 : 3.

Wskazówka: analogicznie. Odpowiedź: $(9/5, 11/5, -4/5)$.

4. Ponumerowano strony w książce. Użyto w tym celu 6869 znaków drukarskich (1 znak drukarski to jedna cyfra). Ile stron ma książka?

Założmy, że numerowana jest od 1. Zatem mamy 9 znaków na jednocyfrowe strony, zostaje 6860. Potem mamy 90 dwucyfrowych stron, czyli 180 znaków, zatem zostaje 6680 znaków. Mamy potem 900 stron trzycyfrowych, co daje 2700 znaków i zostaje ich 3980, co przypada po cztery znaki na stronę, zatem na 995. Zatem w sumie $999 + 995 = 1994$.

5. (Zadanie hrabiego Lwa Tołstoja, znanego (kiedyś?) pisarza). Kosiarze mają skosić dwa pola zboża większe i mniejsze. Pracują jednakowo wydajnie i równomiernie. Zaczęli wszyscy kosić większe pole. W połowie dnia pracy podzielili się połowa została na większym polu skosiła je do końca wieczorem. Reszta przeszła na mniejsze pole, dwa razy mniejsze od pierwszego. Ilu kosiarzy pracowało, jeśli następnego dnia przyszedł na mniejsze pole tylko jeden i w ciągu całego drugiego dnia skosił je do końca.

Wskazówka: można napisać równania: $nv/2 + nv/4 = 1$, $nv/4 + 1 \cdot v = 1/2$. Dlaczego i co oznaczają te zmienne?

Odpowiedź: ośmiu.

6. Dla jakich liczb lub par liczb:

a) $|x| + 5 = |x + 5|$.

Wskazówka: możesz rozważyć 3 przypadki lub narysować dwa wykresy. Odpowiedź: $x > 0$.

b) $|x| - |y| = 0$.

Wskazówka: możesz rozważyć 4 przypadki. Odpowiedź: $y = x$ lub $y = -x$.

c) $|x| + |x + 1| = 3$.

Wskazówka: możesz rozważyć 3 przypadki lub narysować wykresy. Odpowiedź: $x \in \{-2, 1\}$.

d) $\sqrt{(x-4)^2} = x - 4$.

Wskazówka: zauważ, że pierwiastek jest zawsze nieujemny!

7. Zacieniować zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają:

a) $x \geq 3$ i $y < 2$.

Wskazówka: część wspólna dwóch półpłaszczyzn.

b) $x = 3$ i $y \geq 3$.

Wskazówka: półprosta.

c) $x = 2$ lub $x = 4$, oraz jednocześnie $y < 4$.

Wskazówka dwie pionowe półproste.

d) $(x - y)(2x + y)(3x - y) < 0$.

Wskazówka: zatem nieparzyście wiele z tych nawiasów musi być ujemne. Narysuj trzy proste przechodzące przez $(0, 0)$ i rozważ poszczególne obszary pomiędzy nimi.

8. Dla jakich wartości parametru m każdy z układów równań:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7, \\ mx - y = 2 \end{cases}$$

jest układem równań niezależnych, zależnych, sprzecznych.

W pierwszym układzie ten sam współczynnik kierunkowy mają te dwie proste, gdy $m = 6$, więc dla $m \neq 6$ są niezależne. Dla $m = 6$ za to są sprzeczne.

W drugim układzie równań mamy ten sam kierunek, gdy $m = 4/3$, poza tym są niezależne. Gdy $m = 4/3$ są sprzeczne.

9. Rozwiązać (np. metodą wyznaczania kolejnych zmiennych przez podstawienia lub działań stronami) układy równań:

a)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + 5y - 2z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$x = 6 - 2y + z$, więc mamy:

$$\begin{cases} 12 - 4y + 2z + 5y - 2z = 2 \\ 6 - 2y + z + 3y + z = 5 \end{cases},$$

a zatem:

$$\begin{cases} y = -10 \\ y + 2z = -1 \end{cases},$$

a zatem $2z = -1 + 10$, zatem $z = \frac{9}{2}$ oraz $x = \frac{61}{2}$.

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + w + z = 4 \\ 2x + y + w + z = 9 \\ x + 2y + w + z = 9 \\ x + y + 2w + z = 10 \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze dowiadujemy się, że $x = 5$, od trzeciego pierwsze, że $y = 5$, a od czwartego pierwsze, że $w = 6$. Zatem $16 + z = 4$, czyli $z = -12$.