

Geometryczne liczby.

6. Liczby wymierne, rzeczywiste i geometria zespolona materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

18 maja 2020

Tym kolorem oznaczone są informacje dla prowadzących grupy ćwiczeniowe.

1 Matematyka wyborcza

Zadanie 1

W okręgu wyborczym oddano 31200 głosów. Do przydzielenia jest 5 mandatów w sejmie. Mandaty rozdzielono metodą d'Hondta (metoda z dzieleniem liczby głosów przez kolejne liczby naturalne i zakreśleniem tylu największych ile mandatów mamy do przyznania). W wyborach startowały 4 partie: Alchemików, Botaników, Cyników i Domokrażców.

- a) partie osiągnęły następujące liczby głosów: A: 12000, B: 8000, C: 7000, D: 4200. Ile mandatów zdobyły poszczególne komitety w tym okręgu? Jakie wady związane z naruszeniem proporcjonalności dostrzegasz w tym wyniku?
- b) a jakie wyniki byłyby, gdyby 700 wyborców partii Botaników zagłosowało jednak na Alchemików. Kto straci, a kto zyska mandat?

	:1	:2	:3	: 4
A	12000	6000	4000	3000
B	8000	4000	2667	2000
C	7000	3500	2333	1750
D	4200	2100	1400	1050

Czyli 2 mandaty dostają Alchemicy, a Botanicy, Cynicy i Domokrażcy po jednym. Można zwrócić uwagę na to, że ten mandat dla Domokrażców, to „bardzo dużo”.

	:1	:2	:3	: 4
A	12700	6350	4233	3175
B	7300	3650	2433	1825
C	7000	3500	2333	1750
D	4200	2100	1400	1050

Czyli 3 mandaty dostają Alchemicy, a Botanicy i Cynicy po jednym. Mandat stracili niewinnie temu Domokrażcy. Co więcej teraz większość mandatów mają Alchemicy, który zdecydowanie nie mają większości głosów.

Zadanie 2

Na wykładzie zobaczyłaś/eś różne systemy wyborcze pozwalające na wybór jednego kandydata. Były to:

- a) system lwa (wygrywa ten, co ma najwięcej głosów),
- b) system słonia (jest jeszcze druga tura),
- c) system małpy (każdy wyborca może dać ulubionemu kandydatowi 3p, kolejnemu 2p i jeszcze kolejnemu 1p, wygrywa ten o największej liczbie punktów),
- d) system żyrafy (każdy ma do oddania głos za (dodatni) i głos przeciw (ujemny)),
- e) system zebry (po głosowaniu odpada najsłabszy kandydat i głosujemy ponownie, i tak dalej, dopóki któryś kandydat nie zbierze większości),
- f) system węża (pojedynki jeden na jednego ustawione w drabinkę turniejową).

Przemyślcie każdy z tych systemów pod kątem wad i zalet, które w nich widzisz. Którego z tych systemów chcielibyście używać do wyborów przewodniczącego samorządu klasowego? A którego chcielibyście używać do wyborów prezydenta miasta? Dlaczego?

Wady i zalety:

- a) system lwa (wygrywa ten, co ma najwięcej głosów): zaleta: bardzo prosty i tani bo jednoturowy, wada: łatwy w manipulacji poprzez wystawienie kandydata podobnego do potencjalnego zwycięzcy – jest szansa, że po przełożeniu części głosów na podobnego kandydata wygra kandydat, który byłby drugi
- b) system słonia (jest jeszcze druga tura), zaleta: uporanie się z główną wadą systemu jednoturowego (lwa), wada: za to dwa razy droższy i dłuższy niż poprzedni
- c) system małpy (każdy wyborca może dać ulubionemu kandydatowi 3p, kolejnemu 2p i jeszcze kolejnemu 1p, wygrywa ten o największej liczbie punktów), zaleta: wyborca nie musi zdecydować się na jednego kandydata, więc dokonanie wyboru może być przyjemniejsze, wada: skomplikowane liczenie głosów, niejasne co mam zrobić, jeśli bardzo zależy mi na konkretnym kandydacie
- d) system żyrafy (każdy ma do oddania głos za (dodatni) i głos przeciw (ujemny)), zaleta: kandydaci o silnym elektoracie negatywnym nie mają szans, wada: bardzo silna tendencja do głosowania strategicznego w stylu: zagłosuję nie przeciw temu, co go najbardziej nie lubię, tylko przeciw najsilniejszemu przeciwnikowi mojego ulubionego kandydata
- e) system zebry (po głosowaniu odpada najsłabszy kandydat i głosujemy ponownie, i tak dalej, dopóki któryś kandydat nie zbierze większości), zaleta: głosy się nie marnują, wada: bardzo skomplikowany (np. wieloturowy) system wyborczy

- f) system węża (pojedynki jeden na jednego ustawione w drabinkę turniejową), zaleta: potencjalnie wygrywa kandydat, którego ludzie wolą od jakiegokolwiek innego, wada: taki kandydat może nie istnieć i wtedy wynik wyborów zależy od początkowego rozstawienia kandydatów w turnieju.

2 Relacje

Relacje to po prostu zbiór par złożonych z elementów pewnego zbioru X . Jeśli element x jest w relacji $\sim$ z elementem y , to napiszemy $x \sim y$. Jeśli dla każdych $x, y, z \in X$ mamy

- , że $x \sim x$, to relację nazywamy zwrotną,
- jeśli $x \sim y$, to $y \sim x$, to relację nazywamy symetryczną,
- jeśli $x \sim y$ oraz $y \sim z$, to $x \sim z$, to relację nazywamy przechodnią.

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywa się relacją równoważności.

Zadanie 3

Sprawdź które z następujących relacji są zwrotne? Które są symetryczne, a które przechodnie? Które zatem są relacjami równoważności?

- dwoje ludzi jest ze sobą w relacji „starszy”, jeśli wiek pierwszej osoby w parze jest większy lub równy wiekowi drugiej osoby.
- dwie liczby całkowite są w relacji „modulo 7”, jeśli dają tę samą resztę z dzielenia przez 7.
- dwa dźwięki są w relacji „oktawa”, jeśli różnią się o pewną wielokrotność oktawy.
- два państwa są w relacji „wspólna organizacja”, jeśli oba należą do jakiejś takiej samej organizacji międzynarodowej.
- dwie książki są w relacji „tak samo gruba”, jeśli mają tyle samo stron.
- dwie domy są w relacji „mniej więcej tam samo”, jeśli mają ten sam kod pocztowy.
- dwie liczby wymierne są w relacji „odwrotne”, jeśli ich iloczyn wynosi 1.
- dwie proste na płaszczyźnie są w relacji „równoległe”, jeśli są równoległe (lub się pokrywają).
- dwie liczby wymierne są w relacji „blisko”, jeśli różnią się (moduł ich różnicy) o co najwyżej $\frac{1}{2}$.
- dwie liczby rzeczywiste są w relacji „taki sam znak”, jeśli obie są < 0 lub obie są ≥ 0 .

	zwr.	sym.	przech.	rel. równ.
starszy	T	N	T	N
modulo 7	T	T	T	T
oktawa	T	T	T	T
wspólna organizacja	T ¹	T	N ²	N
mniej więcej tam samo	T	T	T	T
tak samo gruba	T	T	T	T
odwrotne	N	T	N	N
równoległe	T	T	T	T
blisko	T	T	N	N
taki sam znak	T	T	T	T

¹ pewnie każde państwo w jakiejś jest

² znów raczej, zależy co rozumiemy przez państwo, większość (wszystkie?) są w ONZ, więc da się argumentować, że tak

Zadanie 4

Jeśli $\sim$ jest relacją równoważności oraz $x \in X$, to klasą abstrakcji elementu x nazywamy zbiór wszystkich rzeczy, które są z nimi w relacji. Zauważ, że klasy abstrakcji stanowią podział oryginalnego zbioru.

W poprzednim zadaniu w przypadku relacji równoważności opisz klasy abstrakcji. Czy da się powiedzieć ile jest klas abstrakcji w poszczególnych wypadkach?

- modulo siedem: jest siedem klas abstrakcji dla każdej reszty i składają się one z liczb o danej reszcie z dzielenia,
- oktawa: to zależy, czy mówimy o ciągłej skali dźwięków, czy o muzycznej (co pół tonu). Jeśli o tej drugiej, to oktawa ma 12 półtonów i tyle jest klas abstrakcji.
- mniej więcej tam samo – każda klasa abstrakcji odpowiada jednemu kodowi pocztowemu. I liczba klas abstrakcji (w Polsce) jest równa liczbie kodów pocztowych w Polsce, którą dokładną liczbę trudno odszukać. Jest oczywiście istotnie mniejsza niż górne ograniczenie 10^5 ,
- tak samo gruba – każda klasa abstrakcji odpowiada liczba stron w książce. Wedle niezmiierzonych odchłani Internetu najgrubsza książka świata ma 50560 stron, a najgrubsza opublikowana książka 4032 strony. Można przyjąć, że jest bardzo niewiele książek o liczbie stron pomiędzy tymi liczbami, więc tę drugą można przyjąć jako górne ograniczenie liczby klas abstrakcji,
- równoległe – każda klasa abstrakcji jest wyznaczona przez kierunek prostej – klas abstrakcji jest więc nieskończenie wiele i każda jest nieskończona,
- taki sam znak – dwie klasy abstrakcji – liczby ujemne i liczby nieujemne.

3 Niewymierność

Zadanie 5

Udowodnij, że następujące liczby nie są wymierne:

a) $\sqrt{3}$,

Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

b) $\sqrt[3]{2}$,

Założmy, że p/q jest nieskracalny oraz $\sqrt{3} = p/q$, więc $3q^2 = p^2$, zatem p jest podzielne przez 3, czyli p^2 jest podzielne przez 9, w takim razie q jest podzielne przez 3, co przeczy nieskracalności ułamka p/q .

Założmy, że p/q jest nieskracalny oraz $\sqrt[3]{2} = p/q$, więc $2q^3 = p^3$, zatem p jest podzielne przez 2, czyli p^3 jest podzielne przez 8, w takim razie q jest podzielne przez 2, co przeczy nieskracalności ułamka p/q .

Zadanie 6

Mając dany odcinek długości 1cm , skonstruuj przy pomocy cyrkla i linijki (bez podziałki) odcinek o długości $\sqrt{3}\text{cm}$.

Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

Przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$. Konstruujemy kąt prosty na końcu tej przekątnej i odkładamy 1. Mamy trójkąt prostokątny o bokach 1 i $\sqrt{2}$, więc z Tw. Pitagorasa jego przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{3}$.

4 Ciągi

Powiemy, że ciąg jest ograniczony z góry, jeśli jest liczba, która jest większa od każdego wyrazu tego ciągu. Ciąg jest rosnący, jeśli każdy kolejny wyraz jest większy lub równy od poprzedniego. W końcu ciąg jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli wyrazy tego ciągu są coraz bliższe sobie, to znaczy dla każdego n , od pewnego miejsca, czyli dla dowolnych $i, j > k$ mamy $|a_i - a_j| < 1/n$ (gdzie a_i to i -ty wyraz ciągu, a a_j to j -ty jego wyraz). Każdy ciąg ograniczony z góry i rosnący jest ciągiem Cauchy'ego, a dla każdego ciągu Cauchy'ego można znaleźć jego granicę, czyli liczbę rzeczywistą g , taką że wyrazy ciągu są coraz bliżej tej liczby, czyli dla każdego n , od pewnego miejsca, czyli dla każdego $i > k$, $|a_i - g| < 1/n$.

Zadanie 7

Sprawdź, które z następujących ciągów są rosnące? Które są ograniczone z góry?

1. $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots$,

2. $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ ($a_n = n - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$),

3. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ ($a_n = \frac{n}{n+1}$),

4. $-1, -2, -4, -8, \dots (a_n = -2^n),$
5. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots (a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}),$
6. $2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, \dots (a_n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}).$

Sprawdź, które są ciągami Cauchy'ego i wyznacz ich granicę.

ciąg	rosn.	ogr. z góry	Cauchy'ego	granica
a)	T	N	N	-
b)	N	N	N	-
c)	T	T	T	1
d)	N	N	N	-
e)	N	T	T	0
f)	N	T	T	0

Zadanie 8

Wiedząc, że pole powierzchni sfery dane jest wzorem $4\pi r^2$ oraz, że objętość dowolnego ostrosłupa to $\frac{1}{3}$ pola jego podstawy przemnożone przez wysokość, przeprowadź dowód tego, że objętość kuli dana jest wzorem $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

Wyobraźmy sobie wielościany wpisane w tę sferę, których ściany boczne to coraz większa liczba trójkątów. Do każdego wierzchołka rysujemy promień i wyobrażamy sobie czworościany o podstawie będącym trójkątem z trzema wierzchołkami na sferze i czwartym wierzchołkiem w środku sfery. Im bardziej gęsto wpiszemy w sferę trójkąty (im bardziej wielościenna będzie bryła którą wpiszemy z coraz mniejszymi ścianami), tym bardziej suma pól tych trójkątów będzie bliższa do pola powierzchni sfery $4\pi r^2$. Ale jednocześnie suma ich objętości będzie coraz bliższa objętości kuli. Zatem z jednej strony ta suma objętości dąży do $4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3}$ (bo do r dąży wysokość każdego czworościanu), z drugiej strony do objętości kuli, zatem objętość kuli to $\frac{4}{3}\pi r^3$.

5 Moce zbiorów

Zadanie 9

Okazuje się, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych też ma tę własność, że nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich jego elementów w hotelu Hilberta. Spróbujcie to udowodnić!

Wskazówka: Należy przeprowadzić dowód „nie wprost”. Więcej wskazówek znajdziecie na końcu tego skryptu.

Rzeczywiście, załóżmy przeciwnie, że to możliwe i rozważmy listę kwaterunkową, na której przyporządkowano wszystkie takie ciągi do pokoi. Lista ta będzie miała charakter tabelki o nieskończonej szerokości i wysokości, w której w kolejnych rzędach zapisano kolejne nieskończone ciągi zer i jedynek przyporządkowane do kolejnych pokoi hotelu Hilberta. Jej lewy górny róg mógłby wyglądać następująco.

0	0	1	1	0	1	...
1	1	1	0	1	1	...
2	0	0	0	0	1	...
3	1	1	0	1	1	...
4	0	1	1	1	1	...
...						

W poszukiwaniu sprzeczności, spójrzmy na przekątną tej tabelki i rozważmy ciąg zer i jedynek, w którym wszystko jest zrobione „na złość”. Niech ten ciąg będzie skonstruowany następująco: jeśli początkowy (zerowy) wyraz ciągu z pokoju 0 to 0, niech nasz ciąg na tym miejscu ma 1, zaś jeśli wyraz ten to 1, niech nasz ciąg ma na tym miejscu 0. Podobnie, jeśli kolejny (pierwszy) wyraz ciągu zakwaterowanego w pokoju 1 to 0, niech nasz ciąg na tym miejscu ma 1, zaś jeśli wyraz ten to 1, niech nasz ciąg ma na tym miejscu 0. I tak dalej, nasz ciąg na n -tym swoim miejscu niech ma tę z liczb 0 lub 1, która nie występuje na n -tym miejscu ciągu zakwaterowanego w n -tym pokoju. Gdyby lewy górny róg listy kwaterunkowej wyglądał tak, jak przedstawiono wyżej, nasz ciąg zaczynałby się więc następująco: 1, 0, 1, 0, 0, ...

Ale tego znalezionej ciągu, wbrew założeniu, nie ma na liście kwaterunkowej. Rzeczywiście, różni się od każdego ciągu na tej liście: od zerowego na zerowym miejscu, od pierwszego na pierwszym, i tak dalej, od n -tego ciągu na n -tym swoim miejscu. Co stanowi sprzeczność i dowodzi, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zer i jedynek nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Słynne twierdzenie Cantora mówi, że podzbiorów dowolnego zbioru jest więcej niż jego elementów. Sprawdźmy najpierw, że rzeczywiście tak jest dla skończonych zbiorów. Ile jest podzbiorów dowolnego zbioru n -elementowego? Oczywiście, 2^n . Dla każdego z n -elementów podejmujemy wybór czy ma być, czy ma nie być w konstruowanym podzbiorze, więc mamy $\underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n$ możliwości.

Zadanie 10

Okazuje się, że to jest też prawda, dla zbiorów nieskończonych. Udowodnijcie, że podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest więcej niż samych liczb naturalnych. To znaczy, że wszystkich podzbiorów nie da się ustawić w pary z liczbami naturalnymi!

Wskazówka: Ale może da się ustawić z czymś innym? Więcej wskazówek na końcu skryptu!

Zauważmy, że każdy podzbiór liczb naturalnych można zakodować za pomocą nieskończonego ciągu zero-jedynkowego, w którym kolejne cyfry kodują obecność (oznaczaną jako 1) lub nieobecność (oznaczaną jako 0) kolejnych liczb naturalnych w rozpatrywanym podzbiorze. Zatem kod zbioru liczb pierwszych zacznie się od 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ..., bowiem 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10 nie są pierwsze, więc na tych miejscach w ciągu widzimy zera, a 2, 3, 5, 7, 11 są liczbami pierwszymi, co skutkuje jedynkami na odpowiednich miejscach ciągu.

Ale skoro każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych ma swój unikalny kod w postaci nieskończonego ciągu zer i jedynek (oraz każdy ciąg zer i jedynek odpowiada pewnemu podzbiorowi liczb naturalnych), to nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych w hotelu Hilberta, bowiem, jak już wiemy, nie da się tego zrobić dla zbioru wszystkich ciągów zero-jedynkowych. Zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$. Możemy napisać, że $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

6 Liczby zespolone

Aby w pełni móc uprawiać algebrę, potrzebujemy umieć pierwiastkować liczby ujemne. W tym celu musimy wprowadzić nową liczbę i , o takiej własności, że $i^2 = -1$. Liczby zespolone $\mathbb{C}$ to liczby postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczby a i b nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną liczby z i oznaczamy $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$. A zatem każdą liczbę zespoloną $a + bi$ możemy przedstawić (i będziemy to często robić) na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (a, b) . Będziemy tą płaszczyznę nazywać płaszczyzną zespoloną.

Dodajemy i mnożymy liczby zespolone „po prostu”, pamiętając jedynie, że $i^2 = -1$, a zatem: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$ oraz $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$. Np.: $(1 + i)(-2 - 3i) + (-1 + 2i) = (1 - 5i) + (-1 + 2i) = -3i$.

Nietrudno również podzielić dwie liczby zespolone przez siebie – wystarczy „wyciągnąć urojoność z mianownika” (podobnie czasem się postępuje przy dzieleniu przez liczbę niewymierną z pierwiastkiem). Czyli:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$, różną od 0, możemy zapisać jeszcze na jeden sposób – mianowicie definiuje ją jej odległość od zera, zwana modułem, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ oraz kąt pomiędzy tą liczbą a osią rzeczywistą, zwany argumentem $\operatorname{Arg} z$ ($\sin \operatorname{Arg} z = \frac{b}{|z|}$, $\cos \operatorname{Arg} z = \frac{a}{|z|}$). A zatem $z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Np.: niech $z = 1 - i$, wtedy $|z| = \sqrt{2}$ oraz $\operatorname{Arg} z = \frac{-\pi}{4}$. W drugą stronę, jeśli $\operatorname{Arg} x = \frac{-\pi}{6}$, $|x| = 2$, to $x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$.

Zadanie 11

Wykonaj działania (w drugim przypadku warto skorzystać z modułów i argumentów!):

$$\frac{(3 + i)^2}{(1 + 2i)^2} - \frac{(1 - 2i)^3}{(1 + i)^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{(3 + i)^2}{(1 + 2i)^2} - \frac{(1 - 2i)^3}{(1 + i)^3} &= \frac{8 + 6i}{-3 + 4i} - \frac{(-3 - 4i)(1 - 2i)}{(2i)(1 + i)} = \frac{8 + 6i}{-3 + 4i} - \frac{-11 + 2i}{-2 + 2i} = \\ &= \frac{-24 + 24 + i(-18 - 32)}{9 + 16} - \frac{22 + 4 + i(-4 + 22)}{4 + 4} = 2i - \frac{13 + 9i}{4} = \frac{-13 - i}{4}. \end{aligned}$$

$$\frac{i^3(1 - i)^{10}}{(1 + i\sqrt{3})^7(\sqrt{3} - i)^8}$$

Wyliczamy moduły i argumenty:

x	$ x $	$Argx$
i	1	$\frac{\pi}{2}$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$1+i\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3}$
$\sqrt{3}-i$	2	$-\frac{\pi}{6}$
i^3	1	$-\frac{\pi}{2}$
$(1-i)^{10}$	2^5	$-\frac{\pi}{2}$
$(1+i\sqrt{3})^7$	2^7	$\frac{\pi}{3}$
$(\sqrt{3}-i)^8$	2^8	$\frac{2\pi}{3}$
L	2^5	$-\pi$
M	2^{15}	π
wynik	2^{-10}	0

A zatem wynik to po prostu $2^{-10}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{1}{1024}$.

Widać od razu, że dodawania liczb zespolonych od strony geometrycznej, to po prostu dodawanie wektorów na płaszczyźnie zespolonej.

Ale dużo bardziej ciekawe jest mnożenie i z pomocą przychodzi tu postać biegunowa. Mia nowicie okazuje się, że mnożenie dwóch liczb zespolonych przez siebie powoduje przemnożenie ich modułów i dodanie ich argumentów. Ten fakt jest wyjątkowo przydatny przy liczeniu potęg liczb zespolonych – i stąd bierze się tzw. wzór de Moivre’a:

$$z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z).$$

Zastosujmy tę wiedzę do jakiegoś przykładu, np. policzmy $(1+i)^6(\sqrt{3}-i)$. Mamy:

- $1+i$ ma moduł $\sqrt{2}$ i argument $\frac{\pi}{4}$, a zatem $(1+i)^6$ ma moduł 8 i argument $\frac{6\pi}{4}$, czyli inaczej $\frac{-\pi}{2}$.
- $\sqrt{3}-i$ ma moduł 2 i argument $-\frac{\pi}{6}$, a zatem $(1+i)^6(\sqrt{3}-i)$ ma moduł 16 i argument $-\frac{2\pi}{3}$.

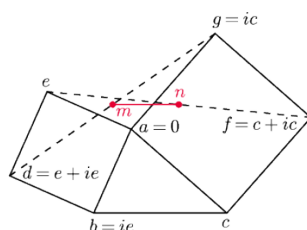
Liczb zespolonych można w związku z tym z powodzeniem użyć do rozwiązania zadań geometrycznych:

Zadanie 12

Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$ (zadanie pochodzi z LII OM).

Wskazówka: Należy przeprowadzić dowód „nie wprost”. Więcej wskazówek znajdziecie na końcu tego skryptu.

Zadanie pochodzi z LII OM, rysunek z artykułu z „Deltą” autorstwa J. Jaszuńskiej.



Rozważmy to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ oraz $C = c$. Wtedy $G = ic$ oraz $F = c + ic$. Niech $E = e$, wtedy $B = ie$ oraz $D = ie + e$. W końcu: $m = ((e + ie) + ic)/2$ oraz $n = (e + (c + ic))/2$. Mamy:

$$\vec{MN} = n - m = \frac{e + c + ic - e - ie - ic}{2} = \frac{c - ie}{2} = \frac{\vec{BC}}{2}.$$

Zatem $MN : BC = 1 : 2$.

7 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Porównaj metody d'Honta (metoda z dzieleniem liczby głosów przez kolejne liczby naturalne) oraz rozszerzoną metodę Sainte-Laguë (metoda z dzieleniem przez 1, 4 oraz 3, 5, 7, ...) na następującym przykładzie. W okręgu oddano 45000 głosów i było do zdobycia 9 mandatów. Startowało 7 partii i osiągnęły one następujące wyniki:

Ekranizatorzy	12000
Fundriserzy	11500
Gawędziarze	7500
Histerycy	6000
Ideowcy	4000
Jałmużnicy	2200
Kabareciarze	1800

Ile mandatów zdobyłyby poszczególne komitety, jeśli mandaty przydzielane byłyby pierwszą metodą? Ile jeśli drugą? Jakie są różnice i jakie widzisz niedoskonałości w tych metodach? Która jest lepsza dla dużych partii?

Wskazówka: Użyj kalkulatora. :P

Metoda d'Hondta:

	:1	:2	:3	: 4
E	12000	6000	4000	3000
F	11500	5750	3833	2875
G	7500	3750	2500	1875
H	6000	3000	2000	1500
I	4000	2000	1333	1000
J	2200	1100	733	550
K	1800	900	600	450

Czyli po 3 mandaty dla Ekranizatorów i Fundriserów, a po jednym dla Gawędziarzy, Histeryków i Ideowców. Egzotyczna koalicja Fundriserów, Histeryków i Ideowców może rządzić (ma większość mandatów), choć nie ma większości głosów.

Metoda Sainte-Laguë :

	głosy	:1,4	:3	:5	:7
E	12000	8571	4000	2400	1714
F	11500	8214	3833	2300	1643
G	7500	5357	2500	1500	1071
H	6000	4285	2000	1200	857
I	4000	2857	1333	800	571
J	2200	1571	733	440	314
K	1800	1286	600	360	257

W porównaniu z poprzednią metodą jeden mandat stracili Fundriserzy na rzecz Gawędziarzy, czyli ta metoda premiuje trochę mniejsze partie. Widać, że choć Ekranizatorzy i Fundriserzy zdobyli bardzo podobne wyniki w głosach, to te 500 głosów różnicy dały Ekranizatorom aż o jeden mandat więcej. Tym razem może rządzić koalicja Ekranizatorów i Gawędziarzy, która ma jeszcze bardziej mniej niż połowę głosów, ale ma większość mandatów.

Zadanie 14

Czy może istnieć relacja równoważności pomiędzy liczbami naturalnymi, która daje skończenie wiele klas abstrakcji o skończonej liczbie elementów każda?

Nie! Klasy abstrakcji to podział zbioru, a jeśli podzielimy zbiór liczb naturalnych na skończenie wiele części, to dostaniemy którąś część będzie nieskończona.

Zadanie 15

Udowodnij, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ nie jest wymierna.

Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

Założmy przeciwnie, że $p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ jest wymierna. Wtedy $p - \sqrt{3} = \sqrt{2}$, czyli $p^2 - 2p\sqrt{3} + 3 = 2$, zatem $\sqrt{3} = \frac{1+p^2}{2}$, jest wymierna, a przed chwilą dowiedliśmy, że nie jest – sprzeczność.

Zadanie 16

Wiedząc, że $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, znajdź granicę ciągu $(1 - \frac{1}{n})^n$. ($n > 0$).

Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

$(1 - \frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} \rightarrow \frac{1}{1 \cdot e} = \frac{1}{e}$, bowiem $n/(n-1) \rightarrow 1$ oraz ciąg $(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}$ to przesunięty o jeden wyraz ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$.

Zadanie 17

Wiemy, że wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta. A jak będzie ze skończonymi ciągami zero-jedynkowymi? Czy je wszystkie można zakwaterować w hotelu Hilberta?

Tak, kwaterujemy po kolei według długości – ciąg pusty do zerowego pokoju, dwa ciągi długości jeden do pokoi 1 – 2, cztery ciągi długości 2 do pokoi 3 – 6, itd. (2^n ciągów o długości n do pokoi $2^n - 1$ do $2^{n+1} - 2$).

Zauważ, że dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ mamy zawsze n liczb x takich, że $x^n = z$. Rzeczywiście pierwsza z nich powstaje poprzez policzenie pierwiastka z modułu $\sqrt[n]{|z|}$ oraz podzielenia argumentu przez n . Ale jeśli do takiego argumentu dorzucę jeszcze dowolną wielokrotność liczby $\frac{2\pi}{n}$, to po podniesieniu do potęgi n dostanę to samo, bo dodatkowy kąt zsumuje się do wielokrotności 2π . Wszystkie te liczby będziemy nazywać pierwiastkami. Znajdź wszystkie $\sqrt[4]{-16}$.

- o argumentcie $\frac{\pi}{4}$, czyli $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- o argumentcie $\frac{3\pi}{4}$, czyli $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$,
- o argumentcie $\frac{-3\pi}{4}$, czyli $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$,
- o argumentcie $\frac{-\pi}{4}$, czyli $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Zadanie 19 (2 punkty)

12

9

7

4

3

2

Liczba wszystkich głosów to 37, więc na jeden mandat trzeba zdobyć 10 głosów.

12

Zadanie 20 (2 punkty)

Udowodnij, że następujące liczby nie są wymierne:

a) $\sqrt{6}$,

b) $\sqrt[3]{3}$.

Założmy, że p/q jest nieskracalny oraz $\sqrt{6} = p/q$, więc $6q^2 = p^2$, zatem p jest podzielne przez 2, czyli p^2 jest podzielne przez 4, w takim razie q jest podzielne przez 2, co przeczy nieskracalności ułamka p/q .

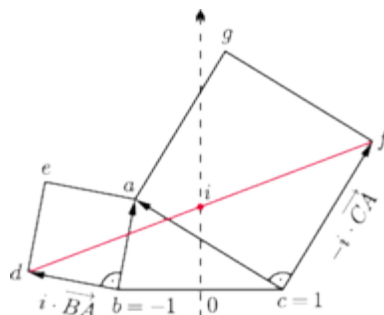
Założmy, że p/q jest nieskracalny oraz $\sqrt[3]{3} = p/q$, więc $3q^3 = p^3$, zatem p jest podzielne przez 3, czyli p^3 jest podzielne przez 9, w takim razie q jest podzielne przez 3, co przeczy nieskracalności ułamka p/q .

Zadanie 21 (2 punkty)

Dane są punkty B i C . Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą AB . Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C (zadanie pochodzi z artykułu z „Deltą” autorstwa J. Jaszuńskiej).

Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

Zadanie i rysunek pochodzi z artykułu z „Deltą” autorstwa J. Jaszuńskiej.



Ustalmy $b = -1$ oraz $c = 1$. Wtedy $d - b = i(a - b)$ i $f - c = -i(a - c)$, a zatem $d + 1 = ia + i$ oraz $f - 1 = -ia + i$. W takim razie $d + f = 2i$, czyli środek odcinka DF to i , co nie zależy od wyboru punktu A .

9 Wskazówki do niektórych zadań

Zadanie 5

Wskazówka: Załóż, że taką liczbę da się zapisać w postaci ułamka i że jest on skrócony (licznik nie dzieli się przez żaden dzielnik mianownika).

Zadanie 6

Wskazówka: Skorzystaj z Tw. Pitagorasa

Zadanie 8

Wskazówka: Wyobraź sobie wielościany wpisane w tę sferę, których ściany boczne to coraz większa liczba trójkątów.

Zadanie 12

Wskazówka: Rozważ to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ oraz $C = c$. Wtedy $G = ic$ oraz $F = c + ic$.

Zadanie 15

Wskazówka: Załóż przeciwnie, że ta liczba jest równa pewnej liczbie wymiernej. Przenieś jeden z pierwiastków na drugą stronę równania i podnieś stronami do kwadratu.

Zadanie 16

Wskazówka: $(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}}$.

Zadanie 21

Wskazówka: Umieść tę sytuację na płaszczyźnie zespolonej.