

# Geometryczne liczby.

## 3. „Elementy” Euklidesa

### materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”  
spisał: Michał Korch

16 marca 2020

Tym kolorem oznaczone są informacje dla prowadzących grupy ćwiczeniowe.

## 1 Geometria i postulaty Euklidesa – konstrukcje

Jak wiecie Euklides w swoim niesamowicie doskonałym dziele „Elementy” zaproponował pięć aksjomatów geometrii

1. Dowolne dwa punkty można połączyć prostą.
2. Dowolną prostą można przedłużyć nieograniczenie.
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w dowolnym punkcie i promieniu równym odcinkowi.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się i to właśnie z tej właśnie strony, jeśli się je odpowiednio przedłuży.

Następnie udowodnił mnóstwo, nie zawsze prostych, faktów geometrycznych.

Jednym z podstawowych problemów geometrycznych rozważanych przez Euklidesa i innych uczonych starożytności była możliwość konstrukcji różnych obiektów geometrycznych używając tylko cyrkla i linijki. Spróbujmy także wymyślić tego rodzaju konstrukcje.

### Zadanie 1

Macie dany odcinek. Korzystając tylko z cyrkla i linijki znajdź środek odcinka, oraz skonstruujcie (narysujcie) kwadrat, którego dany odcinek jest bokiem.

Oczywiście w pierwszej części z obu końców odcinka należy zatoczyć okręgi o dowolnym sporym promieniu (np. długości odcinka). Odcinek wyznaczony przez dwa punkty przecięcia wyznaczonych okręgów przecina się z danym pod kątem prostym w jego środku.

W drugiej części należy przedłużyć dany odcinek  $AB$  i przy pomocy cyrkla odmierzyć z każdej strony dodatkową długość odcinka (powiedzmy będą to punkty odpowiednio  $C$  i  $D$ ). Przy pomocy konstrukcji z pierwszej części znajdujemy środki odcinków  $CB$  i  $AD$ . Są to odpowiednio  $A$  i  $B$  oczywiście, ale jako produkt uboczny dostajemy proste prostopadłe do  $AB$  w tych punktach. Odkładamy na nich długość odcinka  $AB$  w tę samą stronę dostając punkty odpowiednio  $X$  i  $Y$ . Szukany kwadrat to  $XYBA$ .

## Zadanie 2

Skonstruujcie teraz trójkąt równoboczny o boku będącym danym odcinkiem.

Oczywiście wystarczy zatoczyć dwa okręgi o środku w poszczególnych końcach tego odcinka i długości będących długościami tego odcinka.

### 1.1 Zadanie 3

Jak wiecie umiemy skonstruować pięciokąt foremny. Załóżmy więc, że mamy dany pięciokąt foremny. Możecie też założyć, że mamy dany jego środek. Jak skonstruować piętnastokąt foremny?

*Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest na końcu skryptu.*

Łuk okręgu, którego cięciwą jest bok piętnastokąta foremnego jest różnicą łuku, którego cięciwa to trójkąt równoboczny wpisany w okrąg oraz łuku, którego cięciwą jest pięciokąt foremny wpisany w ten okrąg.

## 2 Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie Pitagorasa, którego dowód znalazł się w „Elementach” Euklidesa orzeka, że w każdym trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych podniesionych do kwadratu jest równa długości przeciwprostokątnej podniesionej do kwadratu.

### Zadanie 4

Niech będzie dany trójkąt prostokątny  $ABC$  o przeciwprostokątnej  $AB$ . Wysokość z wierzchołka  $C$  pada na podstawę  $AB$  w punkcie  $H$ . Udowodnijcie, że  $|CH| = \sqrt{|AH||BH|}$ .

*Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.*

$|CH|^2 = |CB|^2 - |BH|^2$ ,  $|CH|^2 = |AC|^2 - |AH|^2$ , więc  $2|CH|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 - |BH|^2 - |AH|^2$ .  
Zatem  $2|CH|^2 = |AB|^2 - |BH|^2 - |AH|^2$ , co daje  $2|CH|^2 = (|AH| + |BH|)^2 - |BH|^2 - |AH|^2$ , zatem  $2|CH|^2 = 2|AH||BH|$

### Zadanie 5

Macie dane dwa kwadraty. Skonstruujcie kwadrat o polu będącym sumą pól zadanych kwadratów.

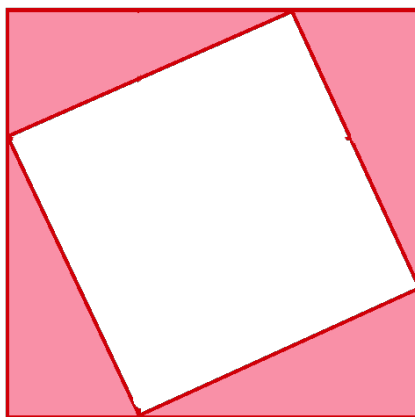
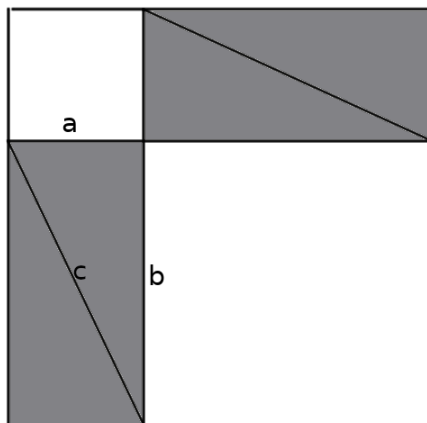
Oczywiście trzeba skonstruować trójkąt prostokątny o bokach będących długościami danych

kwadratów. Wtedy kwadrat o boku będącą przeciwprostokątną to szukany kwadrat. Konstruowanie kątów prostych i kwadratów nauczyliśmy się w zadaniu 1.

## Zadanie 6

Znamy obecnie wiele dowodów Twierdzenia Pitagorasa, w tym aż osiem dowodów przedstawił Euklides. Ale jak dowodził swojego twierdzenia Pitagoras? Tego nie wiemy. Niektórzy jednak domyślają się, że robił to w sposób zobrazowany poniższym rysunkiem.

*Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziecie na końcu.*



## 3 Kąty w okręgu

### Zadanie 7

Kolejnym znanym twierdzeniem, którego dowód można znaleźć w „Elementach” Euklidesa to twierdzenie o kątach w okręgu. Niech będzie dany okrąg i jego łuk. Każdy kąt wpisany w okrąg oparty na tym łuku ma tę samą miarę i jest ona równa mierze kąta pomiędzy cięciwą tego łuku a styczną (tzw. kąt dopisany). Udowodnijcie to twierdzenie.

*Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.*

Niech okrąg ma środek  $O$ , końce łuku to  $A$  i  $B$ , a wierzchołek kąta opartego na tym łuku to  $C$ . Rysując prostą  $OC$  dostaję dwa trójkąty równoramienne  $ACO$  i  $BCO$ . W takim razie jeśli  $\beta_1 = \angle ACO$  oraz  $\beta_2 = \angle BCO$ , to  $2\beta_1 + \angle AOC = 180^\circ$  oraz  $2\beta_2 + \angle BOC = 180^\circ$ . Zatem  $\angle AOB = 360^\circ - \angle AOC - \angle BOC = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2$

*measured angle*  $ACB$ , ale skoro dla każdego punktu  $C$ , kąt  $\angle AOB$  pozostaje ten sam, dostajemy pierwszą tezę zadania.

Rozważmy zatem przypadek, gdy  $AC$  to średnica okręgu, i wtedy kąt  $ABC$  jest prosty. Zatem  $\angle BAC = 90^\circ - \angle ACB$ , ale również  $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$ , gdzie  $\alpha$  to kąt dopisany, bowiem średnica jest prostopadła do stycznej. Zatem  $\angle ACB = \alpha$ .

## Zadanie 8

Udowodnijcie, że w takim razie, jeśli czworokąt da się wpisać w okrąg to suma jego przeciwległych kątów wynosi  $180^\circ$ .

Skoro kąt wpisany to połowa kąta środkowego, a dwa kąty środkowe odpowiadające dwóm naprzeciwległym kątom w takim czworokącie sumują się do pełnego kąta  $360^\circ$ , to zachodzi teza zadania.

Co więc odnotujemy fakt, że warunek w zadaniu 8 można odwrócić – każdy czworokąt, którego przeciwległe kąty sumują się do  $180^\circ$  można wpisać w okrąg.

## Zadanie 9

Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ , taki że kąt przy wierzchołku  $C$  wynosi  $60^\circ$ . Punkty  $D$  i  $E$  są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów  $A$  i  $B$  na proste  $BC$  i  $AC$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$ . Wykażcie, że trójkąt  $DEM$  jest równoboczny.

*Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.*

Łatwo od razu zauważyć, że  $\angle DAE = 30^\circ$ , co więcej trójkąty  $AEB$  oraz  $ADB$  są prostokątne o tej samej przeciwprostokątnej, która jest zatem średnicą okręgu opisanego na każdym z nich, czyli to ten sam okrąg. Inaczej mówiąc punkty  $ABDE$  leżą na jednym okręgu o środku w  $M$ . Kąt  $\angle DME = 2\angle DAE = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ , jako kąt środkowy oparty na tym samym łuku (patrz dowód poprzedniego zadania). Co więcej jest równoramienny, bowiem  $ME$  i  $MD$  to promienie, zatem jest równoboczny.

## 4 Potęga punktu

Jak wiecie, twierdzenie o potędze punktu, które dowiódł Euklides w 3. księdze „Elementów” mówi, że jeśli dany jest okrąg  $o$  oraz proste  $k$  i  $l$  przecinające się w punkcie  $P$  na zewnątrz okręgu  $o$ , takie że  $A$  i  $B$  to punkty przecięcia  $k$  i okręgu  $o$ , zaś  $l$  jest styczna do  $o$  w punkcie  $C$ , to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|.$$

Zatem jeśli mamy punkt  $P$  i okrąg  $o$ , to jakkolwiek go przetniemy prostą uzyskując punkty  $A$  i  $B$ , iloczyn długości  $|PA||PB|$  będzie taki sam. Ten iloczyn nazywa się potęgą punktu  $P$  względem okręgu  $o$ .

## Zadanie 10

Udowodnijcie to twierdzenie w przypadku, gdy prosta  $k$  przechodzi przez punkt  $O$  będący środkiem okręgu  $o$ .

*Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.*

Założmy bez straty ogólności, że punkt  $A$  leży bliżej punktu  $P$  niż punkt  $B$ . Połącz odcinkiem  $O$  i  $C$ . Zauważ, że  $|OP|^2 = (|PA| + |OA|)^2 = |OA|^2 + |PA|(2|OA| + |PA|)$ . Teraz zauważ równość różnych promieni okręgu  $o$  oraz skorzystaj z Tw. Pitagorasa:

$$|OP|^2 = (|PA| + |OA|)^2 = |OA|^2 + |PA|(2|OA| + |PA|) = |OC|^2 + |PA||PB|,$$

ale trójkąt  $PCO$  jest prostokątny, więc  $|OP|^2 - |OC|^2 = |PC|^2$ , czyli  $|PC|^2 = |PA||PB|$ .

## Zadanie 11

Udowodnijcie twierdzenie o potędze punktu w ogólnym przypadku, czyli gdy prosta  $k$  nie przechodzi przez środek okręgu.

*Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.*

Zaznaczcie punkt  $D$  będący środkiem odcinka  $AB$  oraz poprowadźcie odcinki  $OD$ ,  $OP$ ,  $OA$  i  $OC$ . Następnie postępujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu, z tym że tym razem trzy razy trzeba skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Skoro  $|DP| = |AD| + |AP|$ , to

$$|DP|^2 = (|AD| + |AP|)^2 = |AD|^2 + |AP|(2|AD| + |AP|) = |AD|^2 + |AP||BP|,$$

ale  $|DP|^2 = |OP|^2 - |DO|^2$ ,  $|AD|^2 = |AO|^2 - |DO|^2$ ,  $|OP|^2 = |CP|^2 - |OC|^2$  i  $|AO| = |CO|$ . Dostajemy

$$|CO|^2 + |CP|^2 - |DO|^2 = |AO|^2 - |DO|^2 + |AP||BP|,$$

czyli  $|CP|^2 = |AP||BP|$ .

## Zadanie 12

Założmy, że odcinki  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$  oraz  $|AP||BP| = |CP||DP|$ . Udowodnijcie, że  $A, B, C, D$  leżą na jednym okręgu.

Założmy, że  $o$  jest okręgiem opisanym na trójkącie  $ABC$ , oraz  $D'$  jest jego przecięciem z prostą  $CD$ . Wtedy  $|AP||BP| = |CP||D'P|$ , a wiemy, że  $|AP||BP| = |CP||DP|$ , zatem  $|CP||DP| = |CP||D'P|$ , czyli  $|DP| = |D'P|$ , czyli  $D = D'$ .

## 5 Zadania dodatkowe

### Zadanie 13

Skonstruujcie za pomocą cyrkla i linijki sześciokąt foremny.

### Zadanie 14

Przeprowadźcie krok po kroku, cyrklem i linijką, konstrukcję Euklidesa pięciokąta foremnego, którą zobaczyliście podczas wykładu, patrz <https://youtu.be/s9WVS6eZkXI>.

## Zadanie 15

Na bokach  $BC$  i  $AC$  trójkąta ostrokątnego  $ABC$  zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty, odpowiednio,  $BCFE$  i  $ACGH$ . Udowodnijcie, że proste  $AF$ ,  $BG$  i  $EH$  przecinają się w jednym punkcie.

*Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.*

Zauważ, że patrząc z punktu  $C$ ,  $AF$  i  $BG$  są odcinkami obróconymi względem siebie o  $90^\circ$ . Niech  $M$  będzie punktem ich przecięcia. Policzmy miary poszczególnych kątów składających się na kąt  $HME$ . Oczywiście wiemy już, że  $\angle AMB = 90^\circ$ , więc wystarczy wykazać, że  $\angle BME = \angle AMH = 45^\circ$ . Wykażmy, że  $\angle BME = 45^\circ$ , druga równość jest analogiczna. Skoro  $\angle BMF = 90^\circ$ , to czworokąt  $BMFE$  jest wpisany w okrąg i jest to ten sam okrąg, co okrąg opisany na kwadracie  $BCFE$ . Zatem  $\angle BME = \angle BCE = 45^\circ$ , bo to kąt między przekątną i bokiem kwadratu.

## Zadanie 16

Niech prosta  $k$  przechodzi przez środek  $O$  okręgu  $o$  oraz niech  $C$  i  $D$  leżą na tym okręgu po jednej stronie prostej  $k$ . Poprowadźmy jeszcze proste styczne  $m$  i  $n$  do  $o$  odpowiednio w punktach  $C$  i  $D$ . Niech przecięcie  $k$  i  $m$  to  $A$  oraz przecięcie  $k$  i  $n$  to  $B$ , zaś przecięcie  $m$  i  $n$  to  $P$ . W końcu, niech  $H$  będzie spodkiem wysokości z wierzchołka  $P$  na podstawę  $AB$  w trójkącie  $ABP$ . Udowodnij, że kąty  $CHP$  i  $DHP$  są sobie równe.

*Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.*

Punkty  $C, P, D, H$  i  $O$  leżą na jednym okręgu, bo  $\angle PCO = \angle PDO = 90^\circ$ , więc czworokąt  $CPDO$  jest wpisany w okrąg oraz  $\angle PHO = \angle ODP = 90^\circ$ , więc czworokąt  $PHOD$  jest wpisany w okrąg i jest to ten sam okrąg (opisany na trójkącie  $DOP$ ). Teraz badane w zadaniu kąty są równe bo są oparte na łukach o tej samej długości, ponieważ  $CP = PD$  (ponieważ są do siebie symetryczne względem  $PO$ ).

## Zadanie 17

W dziele „O podziałach figur”, przypisywanym również Euklidesowi, formułuje on następujące zadanie. Niech będzie dany trójkąt  $ABC$  oraz punkt  $D$  leżący na boku  $AB$ . Poprowadź przez punkt  $D$  prostą tak, aby podzieliła trójkąt na dwie części o równych polach. Rozwiążcie to zadanie!

*Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu!*

Rozważ najpierw prostą sytuację, gdy  $D$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Jeśli nie jest, to założmy, że  $D$  jest bliżej  $A$ , niż  $B$ . Zaznacz punkt  $E$  będący środkiem odcinka  $AB$  oraz narysuj prostą przechodzącą przez  $E$  i równoległą do  $DC$ . Niech  $F$  będzie punktem przecięcia tej prostej z bokiem  $BC$ . Wtedy prosta zawierająca odcinek  $DF$  jest szukaną prostą. Jest tak, bo pola trójkątów  $CFO$  oraz  $CEO$  są równe, gdzie  $O$  to przecięcie  $DF$  i  $CE$ .

## Zadanie 18

Niech będą dane okręgi  $o_1$  i  $o_2$  nie przecinające się, jeden na zewnątrz drugiego. Prosta  $k$ , jest styczna do  $o_1$  i  $o_2$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $C$ , tak że okręgi są po jednej jej stronie. Druga

prosta styczna  $l$  o takiej samej cesze jest styczna odpowiednio w punktach  $B$  i  $D$ . Odcinek  $AD$  przecina okręgi  $o_1$  i  $o_2$  odpowiednio w punktach  $E$  oraz  $F$ . Wykażcie, że  $|AE| = |DF|$ .

Ze względu na symetrię sytuacji  $|AC| = |BD|$ . Z twierdzenia o potęgze punktu  $|AF||AD| = |AC|^2$ , ale też  $|BD|^2 = |DE||AD|$ , zatem  $|AF| = |DE|$ , a więc również  $|AE| = |DF|$ .

## 6 Proponowane zadania domowe

### Zadanie 19 (za 2 punkty)

Niech będzie dany prostokąt. Skonstruuj cyrklem i linijką kwadrat o polu równym polu tego prostokąta.

*Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.*

Na jednej prostej odkładamy oba boki prostokąta  $AB$  i  $BC$  i dla powstałego tak odcinka  $AC$  znajdujemy (jak w zadaniu 1) jego środek oraz prostą prostopadłą do niego w punkcie  $B$ . Ze środka zataczamy okrąg, którego średnicą jest  $AC$ . Przecięcie okręgu ze znalezioną prostą prostopadłą to punkt  $D$  i na mocy zadania 3,  $BD$  to szukany bok kwadratu, który konstruujemy jak w zadaniu 1.

### Zadanie 20 (za 2 punkty)

Stwórz samodzielnie siatki wszystkich wielościanów foremnych.

Czyli czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu.

### Zadanie 21 (za 2 punkty)

Niech będą dane dwa okręgi przecinające się w punktach  $P$  i  $Q$  oraz punkt  $A$  leżący na pierwszym okręgu, różny od  $P$  i  $Q$ . Punkty przecięcia przedłużeń odcinków  $AP$  i  $AQ$  z drugim z okręgów, to odpowiednio  $B$  i  $C$ . Udowodnij, że styczna do pierwszego z okręgów w punkcie  $A$  jest równoległa do prostej  $BC$ .

*Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.*

Kąt dopisany w punkcie  $A$  jest równy  $\sphericalangle AQP$ , Zatem  $\sphericalangle PQC = 180^\circ - \sphericalangle AQP$ , ale skoro czworokąt  $BCQP$  jest wpisany w okrąg, to  $\sphericalangle PQC + \sphericalangle PBC = 180^\circ$ , a zatem  $\sphericalangle PBC = \sphericalangle AQP$ , i równy naszemu kątowi dopisanemu, co dowodzi równoległości stycznej i prostej  $BC$ .

## 7 Wskazówki do zadań

### Zadanie 4

*Wskazówka: Skorzystajcie trzy razy z tw. Pitagorasa.*

## Zadanie 4

Wskazówka: Przetaw cztery widoczne na rysunku trójkąty, tak aby ich przeciwprostokątne tworzyły kwadrat.

## Zadanie 7

Wskazówka: Dorysujcie odcinek między środkiem okręgu, a wierzchołkiem kąta i rozważcie kąty w powstałych trójkątach.

## Zadanie 8

Wskazówka: Oblicz kąt  $CAD$  lub  $CBE$ , a następnie przyjrzyjcie się czworokątowi  $ABED$ . Czy można na nim opisać okrąg?

## Zadanie 10

Wskazówka: Załóżmy bez straty ogólności, że punkt  $A$  leży bliżej punktu  $P$  niż punkt  $B$ . Połączcie odcinkiem  $O$  i  $C$ . Zauważcie, że  $|OP|^2 = (|PA| + |OA|)^2 = |OA|^2 + |PA|(2|OA| + |PA|)$ . Teraz zauważcie równość różnych promieni okręgu  $o$  oraz skorzystaj z Tw. Pitagorasa.

## Zadanie 11

Wskazówka: Zaznaczcie punkt  $D$  będący środkiem odcinka  $AB$  oraz poprowadźcie odcinki  $OD$ ,  $OP$ ,  $OA$  i  $OC$ . Postępuj podobnie jak w poprzednim zadaniu, z tym że tym razem będziecie korzystać z Tw. Pitagorasa aż dwa razy!

## Zadanie 15

Wskazówka: Zauważcie, że patrząc z punktu  $C$ ,  $AF$  i  $BG$  są odcinkami obróconymi względem siebie o  $90^\circ$ . Niech  $M$  będzie punktem ich przecięcia. Policz miary poszczególnych kątów składających się na kąt  $HME$ .

## Zadanie 16

Wskazówka: Punkty  $C, P, D, H$  i  $O$  leżą na jednym okręgu. Dlaczego?

## Zadanie 17

Wskazówka: Rozważcie najpierw prostą sytuację, gdy  $D$  jest środkiem odcinka  $AB$ .



## Zadanie 19

*Wskazówka: Skorzystaj z zadania 4.*

## Zadanie 21

*Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o kącie dopisanym w okręgu, a następnie zauważ, że czworokąt  $BCQP$  jest wpisany w okrąg.*

**Zadania inspirowane:** listami zadań Kuby Pawlikowskiego z zadań obozu Almu, zadaniami z „Dety” Joanny Jaszuńskiej, pomysłami Michała Korcha, listami zadań dr. J. Bednarczuka do Geometrii I i II, „O podziałach figur” przypisywane Euklidesowi.