

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 27. – z dystansu

2 czerwca 2020

Zadania

1. Rozpatrzmy formę dwuliniową $h: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$\begin{aligned} h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \\ = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 5x_1y_4 + 6x_2y_3 - 4x_2y_4 + \\ + 7x_3y_3 - 3x_4y_1 + 8x_4y_3. \end{aligned}$$

Niech

$$\mathcal{A} = \{(2, 0, 1, 0), (0, 3, 0, 1), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}.$$

Znajdź $G(h, st)$ oraz $G(h, \mathcal{A})$.

2. Niech $h: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową symetryczną na skończenie wymiarowej przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V . Wykaż, że h jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $G(h, \mathcal{A})$ jest kongruentna nad $\mathbb{R}$ do macierzy jednostkowej.

3. Sprawdź, czy formy $h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$\begin{aligned} h_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 \\ h_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \end{aligned}$$

są nieosobliwe. Znajdź rzędy przestrzeni $(\mathbb{R}^2, h_1)$ oraz $(\mathbb{R}^2, h_2)$.

4. Znajdź wektory izotropowe w przestrzeniach

- a) $(\mathbb{R}^2, h)$, gdzie $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$,
b) $(\mathbb{Z}_2^2, h)$, gdzie $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$.

5. Niech $h: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ oraz

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

i niech W będzie podprzestrzenią opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Znajdź bazę przestrzeni $W^\perp$. Czy $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$?

6. Niech $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ oraz

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Podać przykład podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^3$, że $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$.
b) Podać przykład podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^3$, że $\mathbb{R}^3 \neq W \oplus W^\perp$, ale $\dim W + \dim W^\perp = 3$.
c) Podać przykład podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^3$, że $\dim W + \dim W^\perp \neq 3$.
d) Ile wynosi maksymalny wymiar podprzestrzeni nieosobliwej w $(\mathbb{R}^3, h)$?
e) Znajdź wszystkie wektory izotropowe w $(\mathbb{R}^3, h)$.
f) Znajdź wszystkie całkowicie zdegenerowane podprzestrzenie w $(\mathbb{R}^3, h)$.
7. Rozstrzygnij, czy w przestrzeni $(\mathbb{Z}_2^2, h)$, gdzie $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$ istnieje baza ortogonalna.
8. Dla każdej z poniższych przestrzeni dwuliniowych znaleźć bazę prostopadłą:

- a) $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie

$$\begin{aligned} h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \\ = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1. \end{aligned}$$

- b) $(\mathbb{C}^2, h)$, gdzie

$$\begin{aligned} h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \\ = 3x_1y_1 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + x_2y_2. \end{aligned}$$

9. Udowodnij, że baza $\mathcal{A}$ jest prostopadła względem formy dwuliniowej $h: V \times V \rightarrow K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G(h, \mathcal{A})$ jest macierzą diagonalną.

10. Dla każdej z poniższych macierzy znaleźć macierz diagonalną, która jest do niej kongruentna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_2).$$

11. Znajdź sygnaturę macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

12. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{bmatrix}$$

oraz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierze A i B są kongruentne

- nad $\mathbb{R}$?
- nad $\mathbb{C}$?
- nad $\mathbb{Q}$?

13. Dla formy dwuliniowej $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$$

$$= x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 3x_3 y_3$$

znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$, która jest ortogonalna względem h i ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego.

Zadania domowe

1. Dane są macierze rzeczywiste

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Czy istnieje macierz ortogonalna $P \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, taka, że $B = P^{-1}AP$? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy.
- Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa $h: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana warunkiem $G(h, st) = A - sI$ jest iloczynem skalarnym?

2. Forma dwuliniowa $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2.$$

- Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$.
 - Niech $W = \text{lin}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Czy $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$? Czy dla każdej jednowymiarowej podprzestrzeni Z tej przestrzeni mamy $\mathbb{R}^3 = Z \oplus Z^\perp$?
3. Niech $h: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową symetryczną taką, że dla pewnej bazy prostopadłej $v_1, \dots, v_n$ przestrzeni dwuliniowej (W, h) , zachodzi $h(v_i, v_i) > 0$ dla każdego $1 \leq i \leq n$. Wykazać, że h jest iloczynem skalarnym.
4. Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Izomorfizm liniowy $\varphi: V \rightarrow V$ jest automorfizmem przestrzeni dwuliniowych, jeśli zachowuje h . Wykazać, że
- Złożenie dwóch automorfizmów przestrzeni (V, h) jest automorfizmem przestrzeni (V, h) .
 - Dla każdej nieosobliwej podprzestrzeni $W \subseteq V$ przekształcenie $\varphi: V \rightarrow V$ zadane jako $\varphi(v) = v$ dla każdego $v \in W$ oraz $\varphi(v) = -v$ dla każdego $v \in W^\perp$ jest automorfizmem przestrzeni (V, h) .
5. Wykazać, że jeśli (V, h) jest przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$ oraz $v, w \in V$ są nieizotropowe i $h(v, v) = h(w, w)$, to istnieje automorfizm φ przestrzeni (V, h) , że $\varphi(v) = w$.