

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020

ćwiczenia 14.

27 i 28 maja 2020

1. Niech będzie dane następujące zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t^2 + x^2}{2t^4 + 1}, \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

Udowodnij, że to zagadnienie ma jednoznaczne rozwiązanie.

2. Rozwiąż równanie różniczkowe $x'(t) = -2tx$.

3. W roku 1940 w Lascaux we Francji odkryto jaskinię ze śladami paleniska. Wiadomo, że organizmy żywe (żywe drzewa) zawierają dwa izotopy węgla ^{12}C oraz ^{14}C w stałym stosunku wagowym za życia. Od momentu śmierci organizmu (drzewa) ^{14}C ulega stopniowemu rozpadowi, i 99,876% tego izotopu zostaje po 10 latach. Ustalono, że w znalezionym palenisku było 14,5% izotopu węgla ^{14}C z szacowanej początkowej ilości. Jak dawno temu w tej jaskini żył człowiek.

4. Rozwiązać równanie różniczkowe $x'(t) = 1 + x/t$.

5. Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y'(x) = y/x - \sqrt{y/x}, \\ y(1) = 1 \end{cases},$$

6. Rozwiąż równanie $x'(t) = e^{3t} - 2x$.

7. Zgodnie z prawem stygnięcia Newtona szybkość stygnięcia ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatur. Na stoku, gdy akurat temperatura powietrza wynosiła 0° nalałem do termicznego kubka o promieniu 2 cm bez pokrywki herbaty o temperaturze 70° do wysokości 10 cm. Jak szybko jej temperatura spadnie do 20° jeśli współczynnik wymiany ciepła wynosi $k = 600 \text{ W/m}^2\text{K}$, a ciepło właściwe herbaty wynosi $c = 4190 \text{ J/kgK}$.

8. Znajdź wszystkie funkcje $y(x)$ takie, że $y' + xy = x^3y^3$.

9. Wirus rozprzestrzenia się w miasteczku liczącym 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby zakażonych i niezakażonych. Załóżmy, że jeśli początkowo choruje 5 osób, po jednym dniu chorych jest już 10. Po jakim czasie zachoruje 85% populacji miasteczka?