

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020

ćwiczenia 12. – rozwiązania

13 i 14 maja 2020

1. Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna oblicz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Ta całka istnieje, bo funkcja jest ciągła. Więc możemy wziąć dowolny ciąg przedziałów, np. $\{(1+k/n, 1+(k+1)/n): k \in \{0, \dots, n-1\}\}$. W przedziale $(1+k/n, 1+(k+1)/n)$ wybieram punkt $\sqrt{(1+k/n)(1+(k+1)/n)}$.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+k/n)(1+(k+1)/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k+1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Oblicz:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx.$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

3. Oblicz:

a) $\int_0^5 |x^2 - 4| \, dx,$

$$\begin{aligned} \int_0^5 |x^2 - 4| \, dx &= -\int_0^2 (x^2 - 4) \, dx + \int_2^5 (x^2 - 4) \, dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) \Big|_2^5 = \\ &= -\frac{8}{3} + 8 + \frac{125}{3} - 20 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{97}{3}. \end{aligned}$$

b) $\int_{e^{-2}}^{e^2} |\ln x| \, dx,$

$$\begin{aligned} \int_{e^{-2}}^{e^2} |\ln x| \, dx &= -\int_{e^{-2}}^1 \ln x \, dx + \int_1^{e^2} |\ln x| \, dx = \\ &= -x \ln x \Big|_{e^{-2}}^1 + \int_{e^{-2}}^1 dx + x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx = -(0 + 2e^{-2}) + (1 - e^{-2}) + (2e^2 - 0) - (e^2 - 1) = 2 - 3e^{-2} + e^2. \end{aligned}$$

c) $\int_2^4 \frac{2 \, dx}{2x-3},$

Mamy podstawienie $t = 2x - 3, \frac{dt}{dx} = 2, t(2) = 1, t(4) = 5$, czyli:

$$\int_2^4 \frac{2 \, dx}{2x-3} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_1^5 = \ln 5 - 0 = \ln 5.$$

d) $\int_0^{2\pi} x |\cos x| \, dx.$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x |\cos x| \, dx &= \int_0^{\pi/2} x |\cos x| \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} x |\cos x| \, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} x |\cos x| \, dx = \\ &= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx - x \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin x \, dx + x \sin x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin x \, dx = \\ &= \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} + 2\pi - \cos x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{3\pi}{2} + \cos x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = 4\pi - 1 + 1 = 4\pi. \end{aligned}$$

4. Oblicz:

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2},$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^\beta = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} - \frac{-1}{1} = 1.$$

b) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^\beta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \arctg \beta = \frac{\pi}{2}.$$

5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią X , krzywą $y = \frac{1}{x^2}$ oraz prostymi $x = 1$ i $x = 2$.

$$P = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

6. Obliczyć pole obszaru pomiędzy krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$.

Przecinają się one dla $x = 0$ i $x = 1$ oraz ta druga krzywa jest na tym odcinku $[0, 1]$ poniżej, a zatem:

$$P = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

7. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi $|y| = \sqrt{x-1}$, $x - 2y - 4 = 0$.

Te krzywe to parabola ułożona w poziomie oraz prosta. Przecinają się dla $x = 2$ i $x = 10$. No i dla $x \in [1, 2]$ to pole ograniczone z dołu i z góry parabolą (symetryczna względem osi X), a dla $x \in [2, 10]$ ta figura jest z góry ograniczona parabolą, a z dołu prostą.

A zatem:

$$P = 2 \int_0^2 \sqrt{x-1} dx + \int_2^{10} \left(\sqrt{x-1} - \left(\frac{x}{2} - 2 \right) \right) dx = \frac{4(x-1)^{3/2}}{3} \Big|_1^2 + \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \Big|_2^{10} - \left(\frac{x^2}{4} - 2x \right) \Big|_2^{10} = \frac{32}{3}.$$

8. W chwili $t = 0$ [s] tancerz poruszający się po osi X jest w punkcie 0. Wiadomo, że porusza się z prędkością $v = 2t \sin t^2 \pi$ [m/s]. W jakim punkcie znajdzie się po 1s?

Prędkość to pochodna położenia, więc położenie to całka z prędkości:

$$x = \int_0^1 2t \sin t^2 \pi dt$$

podstawiam $u = t^2 \pi$, $du/dt = 2t\pi$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ a zatem:

$$x = \int_0^1 \sin u \pi du = -\frac{1}{\pi} \cos u \pi \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

9. Oblicz (korzystając z całek!) obwód koła o promieniu 1.

Koło jest zadane następującą parametryzacją: $(\cos t, \sin t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$. A zatem:

$$O = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

10. Obliczyć długość krzywej $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$, dla $0 \leq x \leq 1$.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (t^{1/2})^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt$$

Podstawiam $u = \sqrt{1+t}$, czyli $du/dt = \frac{1}{2u}$ oraz $u(0) = 1$, $u(1) = \sqrt{2}$

$$L = \int_1^{\sqrt{2}} 2u^2 du = \frac{2t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}.$$