Geometryczne liczby.
2. Równoliczność
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”

spisał: Michał Korch

24 luty 2020

Tym kolorem oznaczone są informacje dla prowadzących grupy ćwiczeniowe.

1 Elementy i podzbiory

Na dzisiejszych zajęciach będziemy przede wszystkim zajmować się zbiorami. Zbiór jest w matematyce pojęciem pierwotnym, co oznacza, że każde inne matematyczne pojęcie można (w mniej, a z reguły bardziej) zawiły sposób zdefiniować używając pojęcia zbioru. Samo jednak pojęcie zbioru nie ma swojej ścisłej definicji, choć można opisać jego właściwości, zwane czasem aksjomatami – ale o tym jeszcze za chwilę.

W każdym razie, wszyscy prawdopodobnie mają pojęcie, co to zbiór. Zbiory mają elementy. To jest ich kluczowa cecha. Do tego stopnia, że powiemy, że jeśli badamy zbiór A oraz zbiór B i okaże się, że mają te same elementy (czyli każdy element jest w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy jest w zbiorze B), to powiemy, że zbiory A i B są równe. Oczywiście z tego w szczególności wynika, że $\{0,0\}$ oraz $\{0\}$ to opisy jednego i tego samego zbioru. Podobnie $\{0,1\}$ oraz $\{1,0\}$.

Natomiast podzbiorem danego zbioru nazywamy zbiór do którego należą tylko i wyłącznie niektóre (ale być może wszystkie albo żaden) elementy tego zbioru. Czyli, jeśli $A = \{1,2,3\}$, to zarówno $\{1,2\}$ jest podzbiorem $\{1,2,3\}$, ale również na przykład, $\varnothing$ jest też podzbiorem $\{1,2,3\}$.

Zadanie 1

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{0,1,2,3\}$.

elementy: $0, 1, 2, 3$,
podzbiory: $\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}$.

Bardzo często (a może nawet, jak się okaże, zawsze) w matematyce elementami zbiorów są inne zbiory. Oto taki, być może dziwnawy na pierwszy rzut oka zbiór. Rozszyfrujmy go, wskazując w nim wszystkie elementy i wszystkie podzbiory!

Zadanie 2

Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,

elementy: $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
podzbiory: $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

2 Operacje na zbiorach

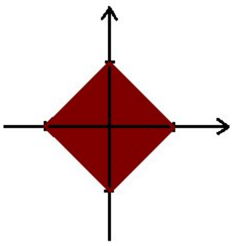
Zbiory można ze sobą sumować. Suma zbiorów A i B, czyli $A \cup B$ to zbiór, do którego należą wszystkie elementy, które są w A lub w B. Natomiast przecięcie (inaczej, część wspólna lub iloczyn) zbiorów w A i B to zbiór $A \cap B$, do którego należą wszystkie elementy będące jednocześnie w A i w B. No i w końcu różnica zbiorów A i B, czyli $A \setminus B$, to zbiór tych elementów, które są w A, a nie są w B, zaś różnica symetryczna $A \triangle B$ to zbiór tych elementów, które są w jednym ze zbiorów A lub B, ale nie w obu.

Zadanie 3

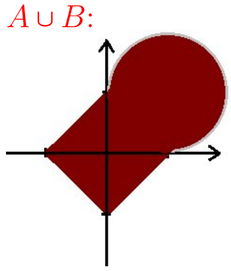
Naszkicujcie na układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $A \triangle B$, jeśli A to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o współrzędnych (x, y) spełniających warunek $|x| + |y| \leq 1$, zaś B to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o współrzędnych (x, y), spełniających warunek $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$.
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziecie na końcu tego skryptu.

Największym problemem pewnie będzie dla uczestników narysowanie zbiorów A i B lub zrozumienie dlaczego właśnie tak wyglądają. Zwróć na ten proces, proszę, szczególną uwagę.

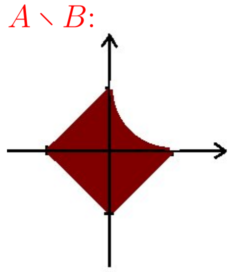
A:



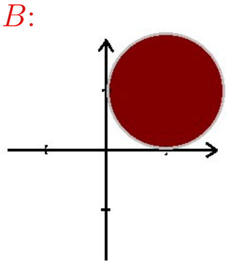
$A \cup B$:



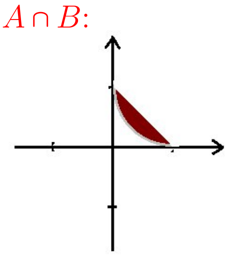
$A \setminus B$:



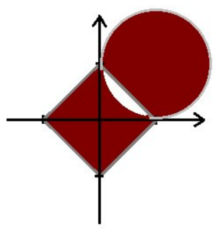
B:



$A \cap B$:



$A \triangle B$:



Zadanie 4

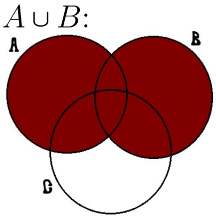
Wskażcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}, \{\varnothing\} \cap \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.
Wskazówka: Pamiętajcie, że np. $\{0, 0\} = \{0\}$.

Obliczamy, że $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$ oraz $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$. Zatem:
elementy: $\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}$,
podzbiory: $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$.

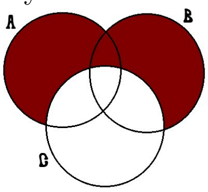
Można też z łatwością zauważyć, że czasem niezależnie od tego jakie weźmiemy zbiory, pewne operacje prowadzą do tego samego. Na przykład, niezależnie od tego, czym są zbiory A, B oraz C, zawsze: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Jak to udowodnić? Można to zrobić jedną z trzech metod. Można całą sytuację narysować. Takie rysunki nazywają się diagramami Venna:

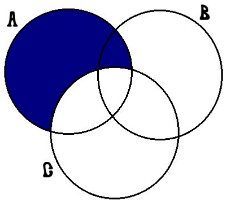
Rozważamy lewą stronę: $A \cup B$:



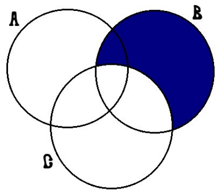
czyli lewa strona to:



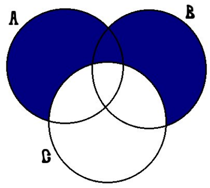
Patrzymy na prawą: $A \setminus C$:



$B \setminus C$:



czyli prawa strona to:



Zgadza się. □

Alternatywnie, można sprawdzić, że to prawda w przypadku tzw. rodziny niezależnej. Jest to taki zestaw zbiorów A, B, C, który ma tę własność, że w każdym polu diagramu Venna jest co najmniej jeden element. Na przykład, możemy wziąć elementy $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, w stworzyć z nich rodzinę niezależną. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 5, 6\}, C = \{3, 4, 6, 7\}$. Jest to rodzina niezależna, co łatwo, choć żmudnie, można sprawdzić. Jeśli sprawdzana równość $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ jest prawdziwa w przypadku rodziny niezależnej, będzie prawdziwa zawsze.

Zatem obliczamy lewą stronę: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, (A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 5\}$ i prawą: $A \setminus C = \{1, 2\}, B \setminus C = \{2, 5\}, (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 5\}$, zgadza się. □

W końcu trzecia metoda, to przeprowadzenie pełnego dowodu, to znaczy sprawdzenie, że jeśli jakiś element należy do lewej strony, to należy też do prawej, a jeśli należy do lewej, to również należy do prawe. A potem na odwrót, że jeśli należy do prawej, to również należy do lewej. Do dzieła. Niech $x \in (A \cup B) \setminus C$, wtedy $x \in A \cup B$ oraz $x \notin C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale $x \notin C$, czyli $(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$, czyli $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, zatem $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
W drugą stronę, niech teraz $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, zatem $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale w obu wypadkach pod warunkiem, że $x \notin C$. Zatem $x \in A \cup B$, ale $x \notin C$, zatem $x \in (A \cup B) \setminus C$. □

Zadanie 5

Udowodnicie zatem, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, zachodzi $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Zastosujemy metodę przez dowiedzenie zawierań w obie strony:

$A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$: Załóżmy, że $x \in A \cap (B \triangle C)$. Zatem $x \in A$ $x \in B$ lub $x \in C$, ale nie w obu równocześnie. A zatem mamy dwa przypadki: $x \in A \cap B$ lub $x \in B \cap C$, ale wiemy, że nie mogą zachodzić równocześnie. A zatem $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
$(A \cap B) \triangle (A \cap C) \subseteq A \cap (B \triangle C)$: Niech $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ zatem na pewno $x \in A$ oraz $x \in B$ lub $x \in C$, ale nie jest tak, że $x \in A \cap B \cap C$. A zatem $x \in A$ oraz $x \in B \cup C$, ale nie $x \in B \cap C$, czyli $x \in A \cap (B \triangle C)$.

3 Hotel Hilberta

Wykonując myślowy eksperyment z hotelem Hilberta, ustawialiśmy w pary nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi hotelu ponumerowanych liczbami naturalnymi (poczynając od zera) w pary z elementami zbioru gości. Zastanawialiśmy się nad zakwaterowaniem nowego gościa (nazwijmy go gościem -1) w sytuacji, w której wszystkie nieskończenie wiele pokoi jest zajętych (nazwijmy gościa, który jest w pokoju numer n, gościem n). Okazało się, że nowego gościa możemy dokwaterować mimo zajętości wszystkich pokoi, przesuwając każdego z dotychczasowych gości do pokoju o numerze o jeden większym. Wtedy pokój zerowy będzie pusty i możemy tam zakwaterować gościa -1. Rzeczywiście przyporządkowaliśmy w pary elementy zbioru gości $\{-1, 0, 1, 2, \dots\} = \{-1\} \cup \mathbb{N}$ z elementami zbioru pokoi $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, przyporządkowując gościowi n pokój o numerze $n + 1$. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiory $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$ są równoliczne, co zapisujemy $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$.

Zadanie 6

W jaki sposób do hotelu Hilberta zakwaterować wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \setminus \{2020\}$, ale w taki sposób, żeby wszystkie pokoje były zajęte?

Do n tego pokoju kwaterujemy liczbę n, o ile $n < 2020$, a w przeciwnym przypadku kwaterujemy liczbę $n + 1$.

Zadanie 7

To przeprowadźmy jeszcze jeden eksperyment myślowy z tym hotelem. Załóżmy, że do pustego hotelu zgłaszają się do niego nieskończona grupa kobiet i nieskończona grupa mężczyzn. Jeśli recepcjonista jest dobrze wychowany, prawdopodobnie wpuści do hotelu najpierw kobiety. Ale niestety jeśli tak zrobi i nie pomyśli – zajmą one wszystkie nieskończenie wiele pokoi i nieskończona grupa mężczyzn zostanie na lodzie. Czy można postąpić inaczej? A jeśli tak, to czy z tego wynika (jeśli tak, to w jaki sposób) że zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne?

Owszem. Kwaterujemy na zmianę. Do zerowego pokoju kobietę, do pierwszego mężczyznę, do drugiego kobietę, do trzeciego mężczyznę itd. W skrócie mówiąc do pokojów o parzystych numerach kwaterujemy kobiety, a do pokojów o nieparzystych numerach – mężczyzn. Udało się zatem zakwaterować obie nieskończone grupy.

Nazwijmy kolejne kobiety kolejnymi liczbami naturalnymi $\{0, 1, 2, \dots\}$, zaś kolejnych mężczyzn liczbami całkowitymi ujemnymi $\{-1, -2, -3, \dots\}$. Kwaterując kobiety i mężczyzn na przemian, umieścimy kobiety w pokojach o numerach parzystych, a mężczyzn w pokojach o numerach nieparzystych. Precyzyjnie mówiąc, kobietę n kwaterujemy w pokoju numer $2n$, zaś mężczyznę n (tym razem jest to liczba ujemna) w pokoju $-2n-1$. Inaczej mówiąc ustawiliśmy gości, którzy zostali nazwani liczbami całkowitymi $\{0,1,2,\dots\} \cup \{-1,-2,-3,\dots\} = \mathbb{Z}$, w pary z pokojami, których numery to liczby naturalne $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$. A zatem dowiedliśmy, że $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ – zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne.

4 Równoliczność

Zbiory A i B są równoliczne (co oznaczane jest jako $|A| = |B|$), jeśli elementy zbioru A można ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru B, tak że każdy z elementów jest w dokładnie jednej parze.

Zadanie 8

Udowodnijcie, że przedział otwarty $(0,1)$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Na przykład, można liczbę x z przedziału $(0,1)$ ustawić w parę z liczbą rzeczywistą $\frac{x-1/2}{x(1-x)}$. Rzeczywiście, dwóm różnym liczbom z przedziału $(0,1)$ przyporządkujemy dwie różne liczby rzeczywiste, i co więcej wszystkie liczby rzeczywiste zostaną wykorzystane. Warto narysować wykres tej funkcji, żeby to zobaczyć!

Zadanie 9

Udowodnijcie zatem, że przedział domknięty $[0,1]$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.
Wskazówka: Pomyślcie, jak w tym przedziale „zanurzyć” hotel Hilberta, a następnie przesuńcie gości o dwa pokoje.

Oczywiście wystarczy udowodnić równoliczność $[0,1]$ i $(0,1)$. Inaczej mówiąc, musimy ustawić w odpowiednie pary wszystkie liczby tych dwóch przedziałów tak, żeby uwzględnić dwie „dodatkowe” liczby (0 i 1) w jednym ze zbiorów. Zadanie to jest ładnym problemem kombinatorycznym, zachęcam więc czytelnika do zastanowienia się samemu przed analizą poniższego rozwiązania. Należy bowiem wyróżnić pewien nieskończony ciąg liczb, na przykład $1/2^n$, dla $n = 1,2,\dots$. Teraz, jeśli liczba x z przedziału $(0,1)$ nie należy do tego ciągu, to ustawiam ją w parę z odpowiadającą jej tą samą liczbą x z przedziału $[0,1]$. Kolejne liczby z wyróżnionego ciągu przesuwam jednak o dwa miejsca (podobnie jak przesuwaliśmy gości w hotelu Hilberta), tak żeby dwa pierwsze wyrazy tego ciągu mogły być towarzyszami w parach z 0 i 1. To znaczy, $1/2$ z przedziału $(0,1)$ ustawiam w parę z 0 z przedziału $[0,1]$, $1/4$ – w parę z liczbą 1, $1/8$ – w parę z $1/2$, $1/16$ z $1/4$, itd. (patrz rysunek) Czyli dla $n > 2$ ustawiam $1/2^n$ w parę z $1/2^{n-2}$. Rzeczywiście, ustawiłem wszystkie liczby z przedziału $(0,1)$ w pary z liczbami z przedziału $[0,1]$ wykorzystując wszystkie liczby z obu przedziałów dokładnie raz. A zatem $|[0,1]| = |(0,1)| = |\mathbb{R}|$.

5 Aksjomaty podstaw matematyki

Matematykę i jej pojęcia (liczby, funkcje, przestrzenie...) można zbudować wychodząc od pierwotnego pojęcia, jakim jest zbiór. Dlatego aksjomaty opisujące właśnie zbiory (sformułowane przez E. Zermela i A. Fraenkela) możemy uznać, za aksjomaty stojące u podstawy matematyki. Chcieliśmy zatem przybliżyć Wam chociaż część z nich – skoro już o aksjomatach rozmawiamy.

Jednak uwaga na początek: w tym rozdziale (a nawet bardziej ogólnie jak się okaże) wszystko jest zbiorem. W szczególności elementy zbioru to też pewne zbiory – i tak czasem warto o nich myśleć. Oznaczenie $a \in b$ oznacza, że a jest elementem zbioru b.

0. Aksjomat zbioru pustego. Istnieje zbiór (zwany zbiorem pustym i oznaczany $\varnothing$), który nie ma żadnego elementu (dla każdego x, $x \notin \varnothing$).

1. Aksjomat ekstencjonalności. Dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy ($A = B$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego x, $x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in B$).

2. Aksjomat pary. Dla każdych a, b istnieje zbiór, do którego należy a i b, a nie należy nic innego (zbiór ten oznaczamy $\{a, b\}$).

Zatrzymajmy się na chwilę, aby pokazać, że dla każdego a istnieje zbiór, do którego należy tylko a i nic więcej (nazywany singletonem a i oznaczany $\{a\}$). Rzeczywiście, trzeba zastosować aksjomat pary dla $a = b$ i już!

Zauważcie też, że dla każdych a, b, $\{a, b\} = \{b, a\}$ (na podstawie aksjomatu ekstencjonalności). Ale możemy zdefiniować specjalny zbiór zwany parą uporządkowaną, który „pamięta”, co jest pierwsze. Dla dowolnych a, b niech $\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$ (czyli para z dwoma elementami: a oraz parą $\{a, b\}$).

Zadanie 10

Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c, d zachodzi $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

Oczywiście jeśli $a = c$ i $b = d$, to $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$.
Załóżmy teraz, że $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = \langle c, d\rangle$. Dwa zbiory są równe, jeśli mają równe elementy. Zatem rozważmy przypadki:

- $\{a\} = \{c\}$, zatem $a = c$,
- $\{a\} = \{c, d\}$, zatem $\{c, d\}$ jest jednoelementowy i $c = d$ oraz $a = c = d$.

Zatem $a = c$. Spójrzmy na b. Przypadki:

- $\{a, b\} = \{c\}$, zatem $\{a, b\}$ jest jednoelementowe i $a = b$ oraz $a = b = c$. Rozważamy dalej:
  - $\{c, d\} = \{a\}$, zatem $\{c, d\}$ jest jednoelementowy i $c = d = a$, czyli $a = b = c = d$.
  - $\{c, d\} = \{a, b\}$, zatem $\{b, d\} = \{b\}$, zatem $\{b, d\}$ jest jednoelementowy, czyli $b = d$.
- $\{a, b\} = \{c, d\}$,
  - $b = c$ i
    * $d = a$, ale wiemy, że $a = c$, więc $a = b = c = d$,
    * $d = b$
  - $b = d$

Zatem $b = d$. $\square$

Dodajmy jeszcze jeden aksjomat. A właściwie tzw. schemat aksjomatów. Dla każdego zdania $\varphi(x)$ (np. $\varphi(x)$ to może być zdanie „x jest niepusty”, albo „x ma parzystą liczbę elementów”, etc.) dodajmy aksjomat:

3. Schemat aksjomatu wyróżniania. Dla każdego zbioru istnieje zbiór złożony z tych jego elementów x, które spełniają zdanie $\varphi(x)$.

Ten aksjomat jest bardzo precyzyjnie dobrany. Istnieje bowiem pokusa, aby go trochę uogólnić pisząc, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$ (czyli nie ograniczać się tylko do elementów pewnego zbioru). Okazuje się jednak, że takie zdanie jest fałszywe!

Zadanie 11

Udowodnijcie, że teza, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$, jest fałszywa.
Wskazówka: Rozpatrzcie zdanie „$x \notin x$”.

Rzeczywiście, załóżmy przeciwnie. Niech X będzie zbiorem wszystkich zbiorów x, że $x \notin x$. Pytanie jednak, czy X jest swoim elementem. Jeśli jest, to nie prawda, że $X \notin X$, czyli nie powinien być elementem X. Jeśli nie jest, to rzeczywiście $X \notin X$, ale wtedy powinien być elementem X – sprzeczność w obydwu przypadkach.

Rozważmy zatem jeszcze jeden aksjomat.

4. Aksjomat nieskończoności. Istnieje zbiór X taki, że $\varnothing \in X$ oraz jeśli $x \in X$, to również zbiór, którego elementami są dokładnie wszystkich elementy x oraz sam x jest elementem X. Inaczej mówiąc istnieje zbiór o nieskończonej liczbie elementów.

Zastanówmy się przez chwilę dlaczego ten zbiór X rzeczywiście ma nieskończenie wiele elementów. Na pewno ma jeden element $\varnothing$. Skoro $\varnothing \in X$, to również zbiór, którego elementy to elementy zbioru pustego (nie ma) oraz sam zbiór pusty (dostajemy więc zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty, czyli $\{\varnothing\}$) jest w tym zbiorze. Skoro jednak $\{\varnothing\} \in X$, elementy to elementy $\{\varnothing\}$ (czyli $\varnothing$) oraz sam $\{\varnothing\}$ (dostajemy więc zbiór dwuelementowy: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$) jest w tym zbiorze. I tak dalej. Tak się składa, że matematycy dokładnie tak, posługując się zbiorami definiują kolejne liczby naturalne:

- $0 = \varnothing$,
- $1 = \{\varnothing\}$,
- $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- ...

Zadanie 12

Wypiszcie zgodnie z tą zasadą liczby 3 i 4!

3 to zbiór, którego elementy to elementy 2 (czyli $\varnothing$ i $\{\varnothing\}$) oraz samo 2 (czyli $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$). Zatem 3 to zbiór trzy-elementowy: $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

4 to zbiór, którego elementy to elementy 3 (czyli $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ i $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$) oraz samo 3 (czyli $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$). Zatem 4 to zbiór cztero-elementowy:

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}.$$

Aksjomatów teorii zbiorów jest dużo więcej – jeśli chcesz poznać wszystkie wyszukaj w Internecie aksjomatów ZFC.

6 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Wypiszcie wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\varnothing, \mathbb{N}, \{0\}, 8\}$.

Elementy: $\varnothing, \mathbb{N}, \{0\}, 8,$
Podzbiory: $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\mathbb{N}\}, \{\{0\}\}, \{8\}, \{\varnothing, \mathbb{N}\}, \{\varnothing, \{0\}\}, \{\varnothing, 8\}, \{\mathbb{N}, \{0\}\}, \{\mathbb{N}, 8\}, \{\{0\}, 8\},$
$\{\varnothing, \mathbb{N}, \{0\}\}, \{\varnothing, \mathbb{N}, 8\}, \{\varnothing, \{0\}, 8\}, \{\mathbb{N}, \{0\}, 8\}, \{\varnothing, \mathbb{N}, \{0\}, 8\}.$

Zadanie 14

Prawdopodobnie zauważyliście pewną prawidłowość dotyczącą tego ile jest podzbiorów skończonego zbioru n-elementowego. Sformułujcie ją i uzasadnijcie.

Jest ich 2^n, bowiem konstruując podzbiór dla każdego elementu wyjściowego mamy do czynienia z wyborem, albo go wziąć do konstruowanego podzbioru, albo nie (dwie możliwości). Skoro ten wybór jest niezależny dla każdego elementu, aby uzyskać liczbę wszystkich możliwości, trzeba je przemnożyć przez siebie.

Zadanie 15

Udowodnicie, że dla dowolnych zbiorów A i B, zachodzi $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$

Rozwiążemy to metodą rodziny niezależnej. Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$. To jest rodzina niezależna. Lewa strona to $A \cup B = \{1, 2, 3\}$. Obliczamy prawą: $A \triangle B = \{1, 3\}$, $A \cap B = \{2\}$, a zatem $A \triangle B \triangle (A \cap B) = \{1, 2, 3\}$. Zgadza się. $\square$

Zadanie 16

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość $(A \setminus B) \cup B = A$?

Nie. Na przykład $A = \varnothing, B = \{0\}$. Wtedy $A \setminus B = \varnothing$, $(A \setminus B) \cup B = \{0\} \neq \varnothing = A$.

Zadanie 17

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B następujące stwierdzenie jest prawdziwe: jeśli $|A| = |B|$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$? Odpowiedź uzasadnijcie!

Nie, np. $|\mathbb{N}| = \|\mathbb{Z}|$, ale $|\mathbb{Z} \setminus N\| = |\mathbb{N}|$, lecz $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \varnothing$.

Zadanie 18

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B następujące stwierdzenie jest prawdziwe: jeśli $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, to $|A| = |B|$? Odpowiedź uzasadnijcie!

Tak. Z założenia wynika, że umiemy ustawić w pary elementy zbioru $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$. Nazwijmy to przyporządkowanie podstawowym. Tworzymy zatem następujące przyporządkowanie elementom zbioru A elementów zbioru B: jeśli $a \in A \setminus B$ przyporządkowujemy mu element z $B \setminus A$ według przyporządkowania podstawowego, a jeśli $a \in A \cap B$, to przyporządkowujemy mu samego siebie. $\square$

7 Proponowane zadania domowe

Zadanie 19 (1 punkt)

Wypisz wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$.

elementy: $\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}$, podzbiory: $\varnothing, \{\mathbb{N}\}, \{\{\mathbb{N}\}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$.

Zadanie 20 (2 punkty)

Zaproponuj podział zbioru liczb naturalnych na nieskończenie wiele nieskończonych (parami rozłącznych) podzbiorów.

Np. do pierwszego zbioru biorę wszystkie liczby nieparzyste, do drugiej te podzielne przez 4 z resztą 2, do trzeciej – te podzielne przez 8 z resztą 4, itd.

Zadanie 21 (3 punkty)

Udowodnij, że równoliczne są zbiory $A = (0,1), B = (0,1) \cup \mathbb{N}$ (gdzie $(0,1)$ oznacza przedział liczb całkowitych pomiędzy 0 i 1 bez końców).

Liczbę $x \in (0,1)$ stawiamy w parze:

- z liczbą $k - 1$, jeśli $x = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- z liczbą $\frac{1}{k+1}$, jeśli $x = \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- z liczbą x w przeciwnym przypadku.

8 Wskazówki do zadań

Zadanie 3

Zauważ, że zbiór A to kwadrat o wierzchołkach $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$, zaś zbiór B to koło o środku w punkcie $(1,1)$ i promieniu 1. Dlaczego tak jest?