

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 26. – z dystansu

29 maja 2020

Zadania

1. Niech K będzie dowolnym ciałem. Znaleźć niezerowy funkcjonal liniowy $\varphi: K^4 \rightarrow K$ równy 0 na podprzestrzeni rozpiętej na wektorach $(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)$.
2. Niech K będzie dowolnym ciałem. Wskazać bazy sprzężone z następującymi bazami K^n :
 - a) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n,$
 - b) $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1 + \varepsilon_n,$
3. Znaleźć współrzędne formy $x_1 + x_2 + x_3$ w bazie sprzężonej do bazy $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3 , gdzie K jest dowolnym ciałem.
4. Niech $\varphi: K^3 \rightarrow K^2$ będzie dane jako $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$. Znaleźć $\varphi^*(2x_1 - x_2)$.
5. Znaleźć jądro i obraz przekształcenia sprzężonego Φ^* , jeśli
 - a) $\Phi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ jest dane wzorem $\Phi(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + 2y - z),$
 - b) $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest dane wzorem $\Phi(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y, 2x + 4y).$
6. Podać taki przykład bazy $\mathbb{R}^3$: v_1, v_2, v_3 , że $\varepsilon_1^* = 2v_1^* + v_3^*, \varepsilon_2^* = v_1^* + v_2^*$.
7. Opisać wszystkie funkcjonały $\Phi \in (M_{n \times n}(\mathbb{R}))^*$ takie, że dla dowolnych $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \Phi(AB) = \Phi(BA)$.
8. Niech $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie taki, że $f = 5\varepsilon_1^* - 2\varepsilon_2^* + 3\varepsilon_3^*$.
 - a) Znaleźć wzór na f ,
 - b) Znaleźć współrzędne f w bazie sprzężonej do bazy $((2, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 1))$.
9. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią unitarną. Rozważmy przekształcenie $\xi': V \rightarrow V^*$ zdefiniowane jako

$$(\xi'(v))(w) = \xi(w, v).$$

Udowodnij, że ξ' jest bijekcją oraz $\xi'(av + bw) = \bar{a}\xi'(v) + \bar{b}\xi'(w)$, czyli, że ξ' jest izomorfizmem $V \rightarrow V^*$, gdzie V^* jest przestrzenią V^* ze zmodyfikowaną operacją mnożenia: $(a \cdot f)(v) = \bar{a} \cdot f(v)$.

10. Udowodnij, że przy opisanym w poprzednim zadaniu utożsamieniu V i V^* , endomorfizmy $\phi: V \rightarrow V$ oraz $\Phi: V^* \rightarrow V^*$ są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi(\phi(v), w) = \xi(v, \Phi(w))$ dla dowolnych $v, w \in V$.

Zadania domowe

1. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym oblicz objętość, pole powierzchni poszczególnych ścian oraz miarę ich kątów w

$$S\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\right).$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych wektorów u, v, w w trójwymiarowej zorientowanej przestrzeni euklidesowej zachodzi

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle.$$

3. Udowodnij, że jeśli $M_{n \times n}(K)$ jest macierzą nad ciałem K o wyrazach będących jedynie zerami i jedynkami taką, że w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie jest dokładnie jedna jedynka, to M jest macierzą ortogonalną.

4. Niech będą dane baza $\mathcal{A} = \{(1, 2, 4), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oraz przekształcenia $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane wzorami $\psi(y_1, y_2) = y_1 + 2y_2$ oraz $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$. Znajdź współrzędne funkcjonału $\varphi^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.

5. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią unitarną. Rozważmy przekształcenie $\xi': V \rightarrow V^*$ zdefiniowane jako

$$(\xi'(v))(w) = \xi(w, v).$$

Utożsammy każdy element $v \in V$ z $\xi'(v) \in V^*$. Niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem

- a) udowodnij, że φ jest samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi = \varphi^*$.
b) udowodnij, że zachodzi $\varphi = \varphi^{**}$. *Wolno Ci skorzystać z tezy ostatniego zadania z ćwiczeń.*