

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 25. – z dystansu

26 maja 2020

Zadania

1. Sprawdź, czy przekształcenie $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\varphi((x, y, z, t)) = (5x - 2y - 2z, -2x + 6y, -2x + 4z, 8t)$$

jest samosprężone w przestrzeni ze standardowym iloczynem skalarnym.

2. Dla przekształcenia z poprzedniego zadania znajdź w $\mathbb{R}^4$ taką bazę, która składa się z wektorów własnych tego przekształcenia i jest ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego.
3. Dla poniższej macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ znaleźć taką macierz ortogonalną C , że macierz $C^T A C$ jest diagonalna.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Niech φ będzie endomorfizmem samosprężonym przestrzeni skończonego wymiaru. Pokazać, że

$$\ker \varphi \perp \operatorname{im} \varphi,$$

oraz, że $\ker \varphi$ oraz $\operatorname{im} \varphi$ rozpinają całą przestrzeń.

5. Udowodnij, że jeśli $v \in V$, gdzie V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ oraz $\xi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ jest formą hermitowską, to $\xi(v, v) \in \mathbb{R}$.
6. Udowodnij, że $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ jest macierzą formy półtoraliniowej $\xi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ w bazie $\{v_1, \dots, v_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, gdzie $a_{ij} = \xi(v_i, v_j)$.
7. Niech A będzie macierzą formy półtoraliniowej $\xi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ w bazie $\mathcal{A}$. Udowodnij, że:
- a) macierz A jest hermitowska wtedy i tylko wtedy, gdy ξ jest hermitowska,
 - b) jeśli ξ jest iloczynem hermitowskim, to $\mathcal{A}$ jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy A jest diagonalna.
8. Niech $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ i $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ będą przestrzeniami unitarnymi n -wymiarowymi oraz niech $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ będzie izomorfizmem liniowym. Niech $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ to będą bazy odpowiednio V_1 i V_2 oraz niech B_1, B_2 będą macierzami odpowiednio $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ oraz $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ odpowiednio w bazach $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$. Niech w końcu, $A = M(\psi)_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$. Udowodnij, że ψ jest izomorfizmem unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $B_1 = A^T B_2 \bar{A}$.
9. Niech $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ i $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ będą przestrzeniami unitarnymi n -wymiarowymi oraz niech $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ będzie izomorfizmem liniowym. Niech $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ to będą bazy ortonormalne odpowiednio V_1 i V_2 oraz niech $A = M(\psi)_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$. Udowodnij, że ψ jest izomorfizmem unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $A^T \bar{A} = I$.
10. Wykaż, że moduły wartości własnych automorfizmów przestrzeni unitarnych są równe 1.
11. Wykaż, że dla każdego automorfizmu przestrzeni unitarnej istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych.