

# Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

## ćwiczenia 24. – z dystansu

22 maja 2020

1. Udowodnij, że jeśli przekształcenie liniowe pomiędzy przestrzeniami euklidesowymi zachowuje iloczyn skalarny, to jest monomorfizmem.

2. Sprawdź, czy przekształcenie  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ , gdzie  $V_1 = \langle \mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_1 \rangle$ ,

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_1 =$$

$$= 10x_1y_1 + 14x_1y_2 + 14x_2y_1 + 20x_2y_2$$

natomiast  $V_2$  to  $\mathbb{R}^2$  ze standardowym iloczynem skalarnym, zadane wzorem  $\varphi((x, y)) = (x + 2y, 3x + 4y)$  jest izometrią.

3. Sprawdź czy macierze

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są ortogonalne.

4. Niech  $V$  będzie przestrzenią  $\mathbb{R}^2$  ze standardowym iloczynem skalarnym oraz  $\varphi: V \rightarrow V$  będzie zadane wzorem  $\varphi((x, y)) = (x, -x + y)$ . Sprawdź czy  $\varphi$  jest izometrią badając odpowiednią macierz.

5. Niech  $K$  będzie ciałem o charakterystyce większej niż 2. Znajdź izometrię pomiędzy  $K^2$  ze standardowym iloczynem skalarnym oraz  $\langle K^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \rangle$ , gdzie

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_2 = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

6. Udowodnić, że każda rzeczywista wartość własna dowolnej macierzy ortogonalnej jest równa 1 lub -1.

7. Udowodnić, że każdy zespolony pierwiastek wielomianu charakterystycznego macierzy ortogonalnej ma moduł równy 1.

8. Udowodnij, że każda izometria 2-wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest albo obrotem, albo symetrią prostopadłą.

9. Udowodnić, że jeśli  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  są macierzami ortogonalnymi o wyznaczniku 1, to  $AB = BA$ . Wykaż, że nie jest to prawdą dla macierzy  $n \times n$ ,  $n > 2$ .

10. W  $\mathbb{R}^2$  ze standardowym iloczynem skalarnym i orientacją zadaną przez bazę  $(1, 2), (3, 1)$  znaleźć wzór na przekształcenie afiniczne będące obrotem o kąt  $-\pi/6$  wokół punktu  $(1, 1)$ .

11. W  $\mathbb{R}^3$  ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć wzory na wszystkie izometrie afiniczne  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  takie, że:

a)  $f((0, 0, 0)) = (0, 0, 0)$  oraz

$$f[\text{af}((1, 2, 1), (0, 1, 0))] \subseteq$$

$$\text{af}((1, 2, 1), (0, 1, 0)),$$

b)  $f((0, 0, 1)) = (0, 1, 0)$  oraz

$$f[\text{af}((0, 0, 0), (0, 1, 0))] \subseteq$$

$$\text{af}((0, 0, 0), (0, 1, 0)),$$

12. Wykazać, że jeśli  $V$  jest przestrzenią euklidesową liniową oraz  $\varphi: V \rightarrow V$  jest monomorfizmem liniowym takim, że

$$\forall v, w \in V (v \perp w \rightarrow \varphi(v) \perp \varphi(w)),$$

to  $\varphi$  jest złożeniem izometrii i jednokładności.

13. Wykazać, że każda macierz ortogonalna  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  jest podobna do macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

lub

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

14. Dla jakich wartości parametru  $t \in \mathbb{R}$ , przekształcenie  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadane wzorem

$$f((x_1, x_2, x_3)) =$$

$$(2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7, 2x_1 + tx_2 + 4x_3 + 5, x_1 + x_3 - 1)$$

zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległościanów ze standardowym iloczynem skalarnym?