

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 23. – z dystansu

19 maja 2020

1. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech będą dane: $p_0 = (0, 1, 0)$, $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1)$. Znajdź objętość, pole powierzchni bocznych oraz kąty boków przy wierzchołku p_0
 - a) równoległościanu $R(p_0; v_1, v_2, v_3)$,
 - b) sympleksu $S = S(p_0, p_0 + v_1, p_0 + v_2, p_0 + v_3)$.
2. Rozpatrzmy sympleks S z poprzedniego zadania oraz punkt $q = (10, 0, 0)$. Znaleźć w S i w każdej jego ścianie punkty najbliższe do q .
3. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech S będzie czworościanem o podstawie

$$S((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

i wierzchołku p leżącym na płaszczyźnie $x_1 = 5$ na okręgu o środku w $(5, 0, 0)$ i promieniu 1. Dla jakiego p objętość S jest największa?

4. W $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź na paraboli $y^2 = x$ punkt leżący najbliżej prostej af $((-1, 0), (0, 2))$.
5. Sprawdź, czy bazy $\mathcal{A} = \{(3, 2), (7, 4)\}$ oraz $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 0)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są zgodnie zorientowane.
6. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym i orientacją wyznaczoną przez bazę standardową znajdź $(1, 0, 2) \times (3, 2, 1)$.
7. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym zadany wzorem

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2 + x_3 y_3$$

znaleźć przedstawienie parametryczne prostej L prostopadłej do płaszczyzny $H : x_1 = 0$ i przecinającej proste $L_1 = (0, 1, 0) + \text{lin}((1, 1, 1))$ oraz $L_2 = (0, 1, 1) + \text{lin}((2, 1, 0))$.

8. Niech iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ będzie zadany jako

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2.$$

Znajdź pola powierzchni $S((1, 0), (2, 1), (3, 3))$ oraz $R((1, 1); (1, 1), (2, 1))$.

9. Niech iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$ będzie zadany jako

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y^3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3.$$

Znajdź pola powierzchni $S((1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ oraz $R((0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

10. Niech iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$ będzie zadany jako

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y^3) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

a orientacja niech będzie dana przez bazę $\{\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, -\varepsilon_3\}$. Obliczyć $(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$ oraz $(1, 1, 1) \times (1, 0, 0)$.

11. Udowodnić, że dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej takich, że $u + v + w = 0$ zachodzi

$$u \times v = v \times w = w \times u.$$