

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 21. – z dystansu

12 maja 2020

1. Rozstrzygnąć, czy w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym istnieje taki wektor α , że układ

$$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1), \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1), \alpha$$

jest bazą ortonormalną oraz wektor $(2, 4, 6, 2)$ ma w niej czwartą współrzędną równą 3.

2. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć rzut prostopadły wektora $\alpha = (1, 1, 1)$ na płaszczyznę $V = \{(x, y, z): x + 2y - z = 0\}$ oraz rzut prostopadły tego wektora na prostą $L = \text{lin}((1, 2, 3))$.

3. Znaleźć obraz wektora α z poprzedniego zadania w symetriach prostopadłych względem V oraz L .

4. W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć wzór na przekształcenie liniowe będące rzutem prostopadłym na przestrzeń $W = \text{lin}((2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$ oraz na przekształcenie będące symetrią prostopadłą względem W .

5. Wykazać, że jeśli $v_1, \dots, v_k$ jest bazą prostopadłą podprzestrzeni W przestrzeni euklidesowej $\langle V, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ oraz $v_{k+1}, \dots, v_n$ jest bazą prostopadłą $W^\perp$ oraz $v \in V$, to

- a) wektor $v - \sum_{i=k+1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$ jest rzutem prostopadłym wektora v na W ,

- b) wektor $v - 2 \sum_{i=k+1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i = -v + 2 \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$ jest obrazem wektora v w symetrii prostopadłej względem W .

6. Niech będzie dana skończenie wymiarowa przestrzeń V nad ciałem K . Funkcję $\xi: V \times V \rightarrow K$ nazywamy uogólnionym iloczynem skalarnym jeśli jest symetryczna i liniowa względem każdego argumentu. Rozstrzygnij dla jakich ciał K zawsze istnieje baza ortogonalna przestrzeni V względem uogólnionego iloczynu skalarnego ξ (czyli baza $v_1, \dots, v_n$ taka, że $\xi(v_i, v_j) = 0$ dla $i \neq j$).

7. Niech $v_1 = (1, 2, 1, 3), v_2 = (3, 5, 1, 4)$ oraz $v_3 = (5, 8, s, 5)$. W $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym oblicz:

- a) wyznacznik Grama układu v_1, v_2, v_3 w zależności od $s \in \mathbb{R}$,

- b) dla jakich $s \in \mathbb{R}$ układ v_1, v_2, v_3 jest liniowo niezależny.

8. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcja $\langle v, w \rangle = v \cdot A \cdot w^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & t & 0 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

zadaje iloczyn skalarny?

9. Niech $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

- a) Czy jest to iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$?

- b) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_r}$ jest iloczynem skalarnym na

$$W_r = \text{lin}((r, 1, 0), (0, 1, 4))?$$

10. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o wierszach $v_1, \dots, v_n$. Niech $W(v_1, \dots, v_n) = 121$. Oblicz $|\det A|$.

11. Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni euklidesowej V z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ takim, że układ $v_1, \dots, v_{k-1}$ jest ortonormalny, a wyznacznik Grama układu $v_1, \dots, v_k$ wynosi 25. Niech w będzie rzutem prostopadłym v_k na $(\text{lin}(v_1, \dots, v_{k-1}))^\perp$. Ile wynosi $\|w\|$?

12. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (0, 1, -2), v_3 = (0, t, 1)$. Niech w będzie rzutem prostopadłym wektora v_3 na $(\text{lin}(v_1, v_2))^\perp$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wektor w ma najmniejszą długość?

13. Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni V . Niech $v \in V$ oraz w niech będzie rzutem prostopadłym v na $(\text{lin}(v_1, \dots, v_k))^\perp$. Wyznacz $\|w\|$ w zależności od $W(v_1, \dots, v_k)$ oraz $W(v_1, \dots, v_k, v)$.