

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 19. – z dystansu

4 maja 2020

1. Niech $W = \text{lin}((0, 1, 2, 1), (2, -1, -6, -1))$. Znaleźć bazę $W^\perp$

- a) w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,
b) w $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_3y_4 - x_4y_3 + 2x_4y_4.$$

2. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

oraz niech $W_t = \text{lin}((2, 5, 0, 0), (t + 2, 4 + 3t, -2 + t, (t - 2)^2))$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- a) $W_t \subseteq W^\perp$?
b) $W_t = W^\perp$?

3. W przestrzeni l^2 rozpatrzmy podprzestrzeń $W = \mathbb{R}_c^\infty$ ciągów prawie stale równe 0. Znajdź $W^\perp$. Czy $l^2 = W \oplus W^\perp$?

4. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym w przestrzeni V . Wykaż, że dla dowolnych $v, w \in V$ zachodzi:

- a) $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy v, w są liniowo zależne,
b) $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $t \geq 0$, że $v = tw$ lub $w = tv$.

5. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozważmy wektory: $\alpha = (-1, 2, 2), \beta = (-1 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), \gamma = (2, 1, t)$. Obliczyć kąt między wektorami α i β oraz określić dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ kąt między wektorami α i γ wynosi $2\pi/3$.

6. Znaleźć bazę prostopadłą $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = xa + 2xb + 2ya + 7by + yc + zb + 10zc.$$

7. Obliczyć współrzędne wektora $(1, 3, 4)$ w bazie ortogonalnej $(2, 2, -1), (2, -1, 2), (-1, 2, 2)$ $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

8. Niech $W = \text{lin}((1, 1, 2, 1), (2, 3, 1, 3), (3, 5, 0, 5))$ oraz V dana jako przestrzeń rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$

- a) ze standardowym iloczynem skalarnym,
b) z iloczynem skalarnym

$$\langle (x, y, z, t), (a, b, c, d) \rangle = 2xa + xd + ta + yb + 2zc + 2td.$$

Znaleźć bazy ortogonalną przestrzeni W i ortonormalną przestrzeni V .

9. Rozpatrzmy w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym podprzestrzenie $V = \{(x, y, z, t) : x - y + 4z + 5t = 0\}$ oraz $W = \text{lin}((1, 0, -1, 2), (1, 1, 1, 1))$. Znaleźć bazy ortonormalne przestrzeni $V^\perp$ oraz $W^\perp$.