

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020
ćwiczenia 8. (i 8 $\frac{1}{2}$)

8 i 15 lub 16 kwietnia 2020

1. Znajdź dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + y^2 + 2x}} - 1.$$

2. Sprawdź, czy istnieje granica. Jeśli tak, to ją oblicz, jeśli nie, to uzasadnij dlaczego.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2},$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y^3 - x^3}{x - y},$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2},$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2},$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin xy}{x},$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x},$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2},$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2).$

3. Zbadać granicę

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 - y^4}{x + y}.$$

4. Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } xy > 0, \\ 0 & , \text{ dla } xy = 0, \\ -1 & , \text{ dla } xy < 0, \end{cases}$$

5. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , \text{ dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ dla } x = y = 0. \end{cases}$$

Pokaż, że granica jest równa zero w punkcie (0,0) jeśli przybliżamy się wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez (0,0), ale f nie jest ciągła w (0,0).

6. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zbadaj, czy istnieją $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

7. Znajdź pochodne cząstkowe funkcji:

a) $f(x, y) = x^y,$

b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4,$

c) $f(x, y, z) = e^{xyz},$

d) $f(x, y, z) = x e^y + y e^z + z e^x.$

8. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 + 2y.$$

9. Zbadać istnienie ekstremów funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 - 2x - y^3 + 3y + 5z^2.$$

10. Znajdź wszystkie funkcje f , takie, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2 + e^x \cos y + 1.$$

11. W jakim kierunku funkcja f rośnie najszybciej w punkcie P ?

a) $f(x, y) = \sin \frac{\pi xy}{4}, P = (3, 1),$

b) $f(x, y, z) = e^x \sin y + e^y \sin z + e^z \sin x, P = (0, 0, 0).$

12. Załóżmy, że jesteśmy w punkcie $(-100, -100, 430)$ góry opisanej przez funkcję $z = 500 - 0.003x^2 - 0.004y^2$.

a) W którym kierunku stok góry jest najbardziej stromy?

b) Jak stromy jest stok w tym punkcie (oblicz kąt najbardziej nachylonej stycznej)?