

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020
ćwiczenia 8. (i 8 $\frac{1}{2}$) – rozwiązania

8 i 15 lub 16 kwietnia 2020

1. Znajdź dziedzinę funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + y^2 + 2x}} - 1.$$

Punkt (x, y) leży w dziedzinie o ile, $\frac{x}{x^2 + y^2 + 2x} - 1 \geq 0$, czyli $\frac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2 + 2x} \leq 0$, co jest możliwe tylko, gdy $x < 0$ oraz $x^2 + y^2 + 2x < 0$ i $x^2 + y^2 + x \geq 0$. Czyli, gdy:

$$(x + 1)^2 + y^2 < 1$$

oraz jednocześnie

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4},$$

Czyli to punkty leżące wewnątrz koła o promieniu 1 i środku w punkcie $(-1, 0)$ za wyjątkiem wnętrza koła o promieniu $1/2$ i środku w $(-1/2, 0)$, inaczej pisząc ta dziedzina to $K((-1, 0), 1) \setminus K((-1/2, 0), 1/2)$.

2. Sprawdź, czy istnieje granica. Jeśli tak, to ją oblicz, jeśli nie, to uzasadnij dlaczego.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2},$

Nie ma granicy, bo dla $x = 0, y = 1/n$ mamy

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \rightarrow 0,$$

ale dla $x = 1/n, y = 1/n$ mamy

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \rightarrow 1/2.$$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y^3 - x^3}{x - y},$

Mamy

$$\frac{y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2}{x - y} = \frac{(y - x)^3}{x - y} = -(y - x) \rightarrow 0.$$

oraz

$$\frac{3x^2y - 3xy^2}{x - y} = \frac{3xy(x - y)}{x - y} = 3xy \rightarrow 3.$$

Natomiast

$$\frac{y^3 - x^3}{x - y} = \frac{y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2}{x - y} - \frac{3x^2y - 3xy^2}{x - y} \rightarrow 0 - 3 = -3.$$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2},$

Nie ma granicy, bo dla $x = 0, y = 1/n$ mamy

$$\frac{\sin xy}{x^2 + y^2} = 0 \rightarrow 0,$$

ale dla $x = 1/n, y = 1/n$ mamy

$$\frac{\sin xy}{x^2 + y^2} = \frac{\sin 1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 1/n^2}{1/n^2} \rightarrow 1/2 \cdot 1 = 1/2.$$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2},$
 $x^2+y^2=r^2$, więc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+r^2}-1}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1+r^2-1}{r^2(\sqrt{1+r^2}+1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}+1} = 1/2.$$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin xy}{x},$

Mamy $\frac{\sin xy}{xy} \rightarrow 1$, bowiem $xy \rightarrow 0$. Zatem $\frac{\sin xy}{x} = y \cdot \frac{\sin xy}{xy} = 1 \cdot 1 = 1$.

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x},$

Mamy $\frac{\sin xy}{xy} \rightarrow 1$, bowiem $xy \rightarrow 0$. Zatem $\frac{\sin xy}{x} = y \cdot \frac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0$.

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2},$

Nie ma granicy. Rzeczywiście, jeśli $x = 1/n$, $y = 0$, to $\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1/n}{1/n^2} = n \rightarrow \infty$, jeśli $x = -1/n$, $y = 0$, to $\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{-1/n}{1/n^2} = -n \rightarrow -\infty$.

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2+y^2).$

$x^2+y^2=r^2 \rightarrow 0$, i $|y| \leq r$, więc

$$|y \ln(x^2+y^2)| = |y| |\ln r^2| \leq r |\ln r^2| = \frac{-\ln r^2}{1/r},$$

ma tę samą granicę, co

$$\frac{-2r \cdot 1/r^2}{-1/r^2} = 2r \rightarrow 0,$$

zatem i granica badanej funkcji wynosi 0.

3. Zbadać granicę

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 - y^4}{x + y}.$$

Mamy $\frac{x^4 - y^4}{x + y} = (x - y)(x^2 + y^2)$. Niech $x_n \rightarrow 0$ oraz $y_n \rightarrow 0$ będą dowolnymi ciągami takimi, że $x_n + y_n \neq 0$. Wtedy:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 - y^4}{x + y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^4 - y_n^4}{x_n + y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)(x_n^2 + y_n^2) = 0.$$

4. Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } xy > 0, \\ 0 & , \text{ dla } xy = 0, \\ -1 & , \text{ dla } xy < 0, \end{cases}$$

Jest jasne, że funkcja jest ciągła w każdym punkcie poza osiami (czyli dla punktów $xy > 0$ oraz $xy < 0$), które są podejrzanym obszarem (czyli gdy $x = 0 \vee y = 0$). Widać, że w tych punktach funkcja nie jest ciągła. Jeśli bowiem (x, y) jest taki, że $x = 0$ lub $y = 0$, to niech $x_n = x + \frac{x}{n} + \frac{y}{n}$, $y = y + \frac{1}{n} + \frac{x}{n} + \frac{y}{n}$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 1$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = -1$, natomiast $f(x, y) = 0$.

5. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , \text{ dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ dla } x = y = 0. \end{cases}$$

Pokaż, że granica jest równa zero w punkcie $(0, 0)$ jeśli przybliżamy się wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez $(0, 0)$, ale f nie jest ciągła w $(0, 0)$.

Dla $y = ax$ mamy

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{ax^3}{(x^2 + a^2)x^2} = \frac{ax}{x^2 + a^2} \rightarrow 0,$$

gdy $x \rightarrow 0$. Tymczasem dla $x = 1/n, y = 1/n^2$ mamy

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2}.$$

więc funkcja nie ma granicy w $(0,0)$, a tym samym nie jest ciągła.

6. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zbadaj, czy istnieją $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0h/h^2 - 0}{h} = 0.$$

Czyli istnieje $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ze względu na symetrię zmiennych.

7. Znajdź pochodne cząstkowe funkcji:

a) $f(x, y) = x^y$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x.$$

b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 z^4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 z^4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x^2 y^3 z^3.$$

c) $f(x, y, z) = e^{xyz}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz}.$$

d) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + ze^x.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^z.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ye^z + e^x.$$

8. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 + 2y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 3y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy + 6y^2 + 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6x + 12y.$$

9. Zbadać istnienie ekstremów funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 - 2x - y^3 + 3y + 5z^2.$$

Obliczam pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 3$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 10z$. Sprawdzam teraz dla jakich punktów te pochodne się zerują i wnioskuję, że $x = 1$, $y = \pm 1$, $z = 0$, czyli jest dwóch potencjalnych kandydatów na ekstrema: $(1, 1, 0)$ i $(1, -1, 0)$. Potrzebujemy pochodnych drugiego rzędu, żeby je zweryfikować.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 10.$$

Zatem różniczka to $d^2 f = 2h_1^2 - 6yh_2^2 + 10h_3^2$, co w punkcie $(1, 1, 0)$ daje wyrażenie $2h_1^2 - 6h_2^2 + 10h_3^2$, które jest dodatnie dla $h_1 = 1, h_2 = h_3 = 0$ oraz ujemne dla $h_1 = h_3 = 0$ oraz $h_2 = 1$, czyli w tym punkcie nie ma ekstremum.

Natomiast w punkcie $(1, -1, 0)$, to daje $2h_1^2 + 6h_2^2 + 10h_3^2$, co jest dodatnie zawsze, więc mamy tu minimum: $f(1, -1, 0) = -3$.

10. Znajdź wszystkie funkcje f , takie, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2 + e^x \cos y + 1.$$

Oczywiście

$$f(x, y) = x^2 y^3 + e^x \sin y + y + C.$$

11. W jakim kierunku funkcja f rośnie najszybciej w punkcie P ?

a) $f(x, y) = \sin \frac{\pi xy}{4}$, $P = (3, 1)$,

$$f' = \left[\frac{y\pi \cos \pi xy/4}{4}, \frac{x\pi \cos \pi xy/4}{4} \right]$$

$$f'(3, 1) = \left[\frac{\pi \cos \pi 3/4}{4}, \frac{3\pi \cos \pi 3/4}{4} \right] = \left[\frac{\pi \sqrt{2}}{8}, \frac{3\pi \sqrt{2}}{8} \right]$$

i to jest ten szukany kierunek.

b) $f(x, y, z) = e^x \sin y + e^y \sin z + e^z \sin x$, $P = (0, 0, 0)$.

$$f' = [e^x \sin y + e^z \cos x, e^x \cos y + e^y \sin z, e^y \cos z + e^z \sin x]$$

$$f'(0, 0, 0) = [1, 1, 1]$$

i to jest szukany kierunek.

12. Załóżmy, że jesteśmy w punkcie $(-100, -100, 430)$ góry opisanej przez funkcję $z = 500 - 0.003x^2 - 0.004y^2$.

a) W którym kierunku stok góry jest najbardziej stromy?

$$z' = [-0.006x, -0.008y]$$

$$z'(-100, -100) = [0.6, 0.8]$$

b) Jak stromy jest stok w tym punkcie (oblicz kąt najbardziej nachylonej stycznej)?

$$\|(0.6, 0.8)\| = \sqrt{0.36 + 0.64} = 1 = \operatorname{tg} \alpha,$$

więc $\alpha = \pi/4$.