

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020

ćwiczenia 7. – quasi-sprawdzian rozwiązania

1 lub 2 kwietnia 2020

Grupa środowa

1. Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{dla } x \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

w punkcie $x = 0$.

Musimy zobaczyć, co to $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$. Zastanawiamy się więc nad $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 \cos \frac{1}{x_n}$ dla ciągu $x_n \rightarrow 0$. Zauważamy, że ta granica jest iloczynem ciągu ograniczonego $\cos \frac{1}{x_n}$ i dążącego do zera x_n^2 , więc dąży do zera. Zatem $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, czyli ta funkcja jest ciągła w punkcie $x = 0$.

2. Oblicz granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x}$.

Zauważamy, że mamy nieoznaczoność $0/0$, więc możemy skorzystać z reguły de l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 e^{x^3}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} (x - \pi)^{\cos x/2}$. Wskazówka: Przekształć wyrażenie do postaci $e^{\text{wyrażenie}/\text{wyrażenie}}$ i oblicz granicę tego wykładnika.

Zauważamy, że

$$(x - \pi)^{\cos x/2} = e^{\ln(x - \pi)(\cos x/2)} = e^{\frac{\ln(x - \pi)}{1/(\cos x/2)}}.$$

Granica $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\ln(x - \pi)}{1/(\cos x/2)}$ daje nieoznaczoność postaci $-\infty/(-\infty)$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\ln(x - \pi)}{1/(\cos x/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1/(x - \pi)}{-(\sin x/2)/2(\cos x/2)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2(\cos x/2)^2}{-\sin(x/2)(x - \pi)}$$

Znów mamy nieoznaczoność, tym razem $0/0$, więc ponawiamy stosowanie reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2(\cos x/2)^2}{-\sin(x/2)(x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2(\cos x/2)(\sin x/2)}{-\cos(x/2)(x - \pi)/2 - \sin(x/2)} = \frac{0}{0 - 1} = 0.$$

Zatem granica wyjściowej funkcji wynosi $e^0 = 1$.

3. Oblicz pochodne funkcji określonych wzorem:

a) $f(x) = \cos^2 \left(\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$,

$$f'(x) = \frac{\frac{3\sqrt{x^2}}{1+x^2} - \frac{2\arctg x}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^4}} \cdot \left(-\sin \left(\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \right) \cdot 2 \cos \left(\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} \right).$$

b) $f(x) = (5x^2 + 1)^{2+3^x}$,

$$f(x) = e^{\ln(5x^2+1) \cdot (2+3^x)},$$

więc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{10x(2+3^x)}{5x^2+1} + \ln(5x^2+1)3^x \cdot \ln 3 \right) e^{\ln(5x^2+1) \cdot (2+3^x)} = \\ &= \left(\frac{10x(2+3^x)}{5x^2+1} + \ln(5x^2+1)3^x \cdot \ln 3 \right) (5x^2+1)^{2+3^x}. \end{aligned}$$

4. Pokazać, że równanie $xe^x = 2$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty i że ten pierwiastek leży w przedziale $(0, 1)$.

Rzeczywiście, gdy $f(x) = xe^x - 2$, to $f(0) = -2 < 0$ oraz $f(1) = e - 2 > 0$, zatem z własności Darboux na przedziale $(0, 1)$ istnieje c , że $f(c) = 0$ i to jest ten pierwiastek.

Dla $x \geq 1$ mamy $xe^x - 2 \geq e - 2 > 0$, oraz dla $x \leq 0$ mamy $xe^x - 2 < x - 2 < 0$ (bo dla takich x , $0 < e^x < 1$).

Grupa czwartkowa

1. Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \sqrt{|x|}, & \text{dla } x \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

w punkcie $x = 0$.

Musimy zobaczyć, co to $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2 \sqrt{|x|}$. Zastanawiamy się więc nad $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 \sin^2 \sqrt{|x_n|}$ dla ciągu $x_n \rightarrow 0$. Zauważamy, że ta granica jest iloczynem ciągu ograniczonego $\sin^2 \sqrt{|x_n|}$ i dążącego do zera x_n^2 , więc dąży do zera. Zatem $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2 \sqrt{|x|} = 0 = f(0)$, czyli ta funkcja jest ciągła w punkcie $x = 0$.

2. Oblicz granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^3} - 1}{\cos x - 1}$.

Zauważamy, że mamy nieoznaczoność $0/0$, więc możemy skorzystać z reguły de l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^3} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2 e^{-x^3}}{-\sin x}.$$

I mamy ponownie nieoznaczoność $0/0$. Stosujemy regułę ponownie.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2 e^{-x^3}}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x^2 e^{-x^3} + 9x^4 e^{-x^3}}{-\cos x} = 0/1 = 0.$$

Zatem szukana granica to 0.

- b) $\lim_{x \rightarrow \pi^-/2} (\pi - 2x)^{\cos x}$. Wskazówka: Przekształć wyrażenie do postaci $e^{\text{wyrażenie}/\text{wyrażenie}}$ i oblicz granicę tego wykładnika.

Zauważamy, że

$$(\pi - 2x)^{\cos x} = e^{\ln(\pi - 2x)(\cos x)} = e^{\frac{\ln(\pi - 2x)}{1/(\cos x)}}.$$

Granica $\lim_{x \rightarrow \pi^-/2} \frac{\ln(\pi - 2x)}{1/(\cos x)}$ daje nieoznaczoność postaci ∞/∞ , więc stosujemy regułę de l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-/2} \frac{\ln(\pi - 2x)}{1/(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi^-/2} \frac{-2/(\pi - 2x)}{-(\sin x)/(\cos x)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi^-/2} \frac{-2(\cos x)^2}{-(\sin x)(\pi - 2x)}$$

Znów mamy nieoznaczoność, tym razem $0/0$, więc ponawiamy stosowanie reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-/2} \frac{-2(\cos x)^2}{-(\sin x)(\pi - 2x)} = \lim_{x \rightarrow \pi^-/2} \frac{-4(\cos x)(\sin x)}{-(\cos x)(\pi - 2x) + 2(\sin x)} = \frac{0}{0+2} = 0.$$

Zatem granica wyjściowej funkcji wynosi $e^0 = 1$.

3. Oblicz pochodne funkcji określonych wzorem:

a) $f(x) = \sin^2\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{x^3}}\right),$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3 \arcsin x \sqrt{x}}{2}}{x^3} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{x^3}}\right) \right) \cdot 2 \sin\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{x^3}}\right).$$

b) $f(x) = (\sin x^2)^{2^x},$

$$f(x) = e^{\ln(\sin x^2) \cdot (2^x)},$$

więc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2^x \cdot 2x \cos x^2}{\sin x^2} + \ln(\sin x^2) \cdot 2^x \cdot \ln 2 \right) \cdot e^{\ln(\sin x^2) \cdot (2^x)} = \\ &= \left(\frac{2^x \cdot 2x \cos x^2}{\sin x^2} + \ln(\sin x^2) \cdot 2^x \cdot \ln 2 \right) \cdot (\sin x^2)^{2^x}. \end{aligned}$$

4. Pokazać, że równanie $x^3 e^{x^2} = 2$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty i że ten pierwiastek leży w przedziale $(0, 1)$.

Rzeczywiście, gdy $f(x) = x^3 e^{x^2} - 2$, to $f(0) = -2 < 0$ oraz $f(1) = e - 2 > 0$, zatem z własności Darboux na przedziale $(0, 1)$ istnieje c , że $f(c) = 0$ i to jest ten pierwiastek.

Dla $x \geq 1$ mamy $x^3 e^{x^2} - 2 \geq e - 2 > 0$, oraz dla $x \leq 0$ mamy $x^3 e^{x^2} - 2 < x^3 - 2 < 0$ (bo dla takich x , $0 < e^{x^2} < 1$).