

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 17. – z dystansu

24 kwietnia 2020

Zadania

1. Niech $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $f((1, 1, 1)) = (2, 0, 1, 0)$, $f((2, 1, 1)) = (0, 1, 3, 3)$, $f((1, 2, 1)) = (0, 0, 1, 3)$ oraz $f((1, 1, 2)) = (0, 1, 0, 1)$. Znajdź wzór na f .
2. Udowodnij, że dla dowolnych przekształceń afinicznych $f, g: H \rightarrow M$, $(f + g)/2$ też jest przekształceniem afinicznym, oraz $((f + g)/2)' = f'/2 + g'/2$.
3. Niech $H \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną opisaną równaniem $x + 2y - z = 1$. Znajdź wzór na przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $f[H] = \{(1, 1, 4)\}$ oraz $f((1, 1, 1)) = (0, 0, 1)$.
4. Niech $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na $M: x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2$ wzdłuż $L = (1, 1, 1, 0) + \text{lin}((2, 0, 3, 0))$ i niech $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem M wzdłuż L . Niech ponadto H będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Znaleźć

- a) $f((2, 0, 1, 1))$ oraz $g((2, 0, 1, 1))$,
 - b) parametryzację przestrzeni $f[H]$,
 - c) układ równań opisujący przestrzeń $g^{-1}[H]$.
5. Niech $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o środku $(1, 1, 1)$ i skali 3, a $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przesunięciem o wektor $(3, 2, 1)$, zaś $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na $L = (0, 1, 0) + \text{lin}((1, 1, 2))$ wzdłuż $H: x + 4y + 3z = 2$. Znaleźć wzory na:
 - a) $f \circ g \circ h$,
 - b) $g \circ h \circ h \circ f$,
 6. Niech $p; v_1, \dots, v_n$ będzie układem bazowym przestrzeni afinicznej H nad ciałem K oraz niech $f, g: H \rightarrow H$ będą przekształceniami afinicznymi i niech $A, B \in M_{n \times n}(K)$ oraz $A', B' \in$

$M_{n \times 1}(K)$ będą takimi macierzami, że dla każdych $x_1, \dots, x_n \in K$

$$f(p_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = p_0 + y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

oraz

$$g(p_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = p_0 + z_1 v_1 + \dots + z_n v_n,$$

gdzie $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ są takie, że

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + A' = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$B \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + B' = \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Niech $C = BA$ oraz $C' = BA' + B'$. Wykaż, że dla każdych $x_1, \dots, x_n \in K$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(p_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) &= \\ &= p_0 + w_1 v_1 + \dots + w_n v_n, \end{aligned}$$

gdzie $w_1, \dots, w_n \in K$ spełniają

$$C \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + C' = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

7. Środkiem ciągu punktów $p_1, \dots, p_n$ nazwiemy punkt

$$\frac{1}{n} p_1 + \dots + \frac{1}{n} p_n,$$

o ile charakterystyka ciała nie jest równa n . Udowodnij, że dla każdego ciągu punktów $p_1, \dots, p_n$ w przestrzeni afinicznej nad ciałem o charakterystyce różnej od n i od $n - 1$, proste L_i przechodzące przez punkt p_i oraz środek ciągu $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n$ przecinają się w jednym punkcie. Sformułuj to twierdzenie w języku geometrycznym dla przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$.

Praca domowa

1. Niech A będzie macierzą 2×2 o wielomianie charakterystycznym $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$. Przedstaw macierze A^4 oraz A^{-1} jako kombinacje macierzy A oraz macierzy jednostkowej. *Wskazówka: tw. Cayleya-Hamiltona.*
2. W $\mathbb{R}^3$ znaleźć prostą L przechodzącą przez punkt $(0, 1, 1)$ i przecinającą proste $L_1 = (1, 0, 0) + t(0, 2, 1)$ oraz $L_2 = (0, 0, 0) + t(-1, 0, 1)$.
3. Znajdź układ równań, parametryzację oraz bazę punktową prostej znalezionej w poprzednim zadaniu.
4. Znajdź bazę punktową przestrzeni K^4 złożoną z punktów leżących na prostej $L_1 = (0, 0, 0, 0) + t(1, 1, 0, 0)$ oraz płaszczyźnie $L_2 = (1, 0, 1, 0) + t(0, 1, 1, 0) + u(0, 0, 0, 1)$.
5. Niech $H \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną opisaną równaniem $x + y - 3z = -2$. Znajdź wzór na przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $f[H] = \{(1, 0, 0)\}$ oraz $f((1, 1, 1)) = (1, 0, 1)$.