

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 14. – z dystansu

8 kwietnia 2020

Zadania

1. Dla każdej pary z poniższych macierzy, zbadać czy są podobne.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Znaleźć postać Jordana następującej macierzy

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Dla poniższych endomorfizmów $\varphi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sprawdź, czy istnieje baza $\mathbb{R}^3$, że A_i to macierz tego przekształcenia w tej bazie. Jeśli tak, znaleźć taką bazę.

(a) $\varphi_1((x, y, z)) = (x + y + z, -y + 2z, -2y + 3z),$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $\varphi_2((x, y, z)) = (x + 2y + 4z, -5y + 3z, z), A_2 =$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Policz 123 potęgę macierzy.

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Niech φ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V taką, że dla każdego $v \in W$, $\varphi(v) \in W$. Niech $\psi = \varphi|_W: W \rightarrow W$. Wykazać, że wielomian charakterystyczny ψ dzieli wielomian charakterystyczny φ .

6. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, istnieje macierz $n \times n$ A , taka że $A^3 = A + I$. Udowodnij, że dla każdej takiej macierzy $\det A > 0$.

Praca domowa na 21.04

1. Oblicz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{11}.$$

2. Rozstrzygnij, czy dla przekształcenie $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x + z, 2y + 2z, -4y - 2z)$ istnieje baza złożona z wektorów własnych w $\mathbb{R}^3$? Czy jest taka baza w $\mathbb{C}^3$? Jeśli tak, podaj taką bazę.

3. Znaleźć bazę Jordana dla następującej macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Policz 10 potęgę macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Niech A oraz B będą macierzami zespolonymi $n \times n$ oraz niech rząd $AB - BA$ wynosi 1. Udowodnij, że $(AB - BA)^2 = 0$.