

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020
ćwiczenia 14. – z dystansu – rozwiązania

8 kwietnia 2020

1. Dla każdej pary z poniższych macierzy, zbadać czy są podobne.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 1 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (a-2)^3.$$

$$A_1 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

więc $r(A_1 - 2I) = 2$ i $q_1 = 3 - 2 = 1$. A zatem macierz w postaci Jordana podobna do tej macierzy to

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (a-2)^3.$$

$$A_2 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

więc $r(A_2 - 2I) = 1$ i $q_1 = 3 - 1 = 2$. A zatem macierz w postaci Jordana podobna do tej macierzy to

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = (a-2)^3.$$

$$A_3 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

więc $r(A_3 - 2I) = 1$ i $q_1 = 3 - 1 = 2$. A zatem macierz w postaci Jordana podobna do tej macierzy to

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = (a-2)^3.$$

$$A_4 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

więc $r(A_4 - 2I) = 2$ i $q_1 = 3 - 2 = 1$. A zatem macierz w postaci Jordana podobna do tej macierzy to

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

To oznacza, że A_1 z A_4 są podobne oraz A_2 z A_3 są podobne.

2. Znaleźć postać Jordana następującej macierzy

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 5-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4-a & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5-a & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5-a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 5-a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5-a \end{vmatrix} = (5-a)^5(4-a).$$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

więc $r(A - 5I) = 4$ i $q_1 = 6 - 4 = 2$. Musimy policzyć

$$(A - 5I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -2 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

więc $r(A - 5I)^2 = 3$ i $q_2 = 4 - 3 = 1$, a zatem jedna z tych dwóch klatek musiała być 1×1 . A zatem macierz w postaci Jordana podobna do tej macierzy to

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Dla poniższych endomorfizmów $\varphi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sprawdź, czy istnieje baza $\mathbb{R}^3$, że A_i to macierz tego przekształcenia w tej bazie. Jeśli tak, znaleźć taką bazę.

$$(a) \quad \varphi_1((x, y, z)) = (x + y + z, -y + 2z, -2y + 3z), \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad \varphi_2((x, y, z)) = (x + 2y + 4z, -5y + 3z, z), \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M(\varphi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 2 \\ 0 & -2 & 3-a \end{vmatrix} = (1-a)(a^2 - 2a + 1) = (1-a)^3.$$

Tymczasem macierz A_1 ma wartość własną 4, więc nie może być podobna.

$$M(\varphi_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 2 & 4 \\ 0 & -5-a & 3 \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2(-5-a).$$

Zatem macierz podobna w postaci Jordana to $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Wektorem własnym dla 1 jest $(1, 0, 0)$,

zaś dla -5 , $(-1, 3, 0)$. Natomiast na wektor $(1, 0, 0)$ w przekształceniu $\psi(x, y, z) = (2y + 4z, -6y + 3z, 0)$ przechodzi $(0, 1/10, 1/5)$, czyli $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (0, 1/10, 1/5), (-1, 3, 0)\}$ jest bazą Jordana.

$$\begin{vmatrix} -3-a & 4 & 0 \\ 2 & -1-a & 0 \\ 1 & 3 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)(a^2 + 4a - 5) = (1-a)^2(-5-a).$$

Zatem macierz podobna w postaci Jordana to $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Wektorem własnym dla 1 jest $(0, 0, 1)$,

zaś dla -5 , $(12, -6, 1)$. Natomiast na wektor $(0, 0, 1)$ w przekształceniu $\psi(x, y, z) = (-4x + 4y, 2x - 2y, x + 3y)$ przechodzi $(1/4, 1/4, 0)$, czyli $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (1/4, 1/4, 0), (12, -6, 1)\}$ jest bazą Jordana. Zatem

$$A = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} M M(id)_{st}^{\mathcal{B}} = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} M(id)_{st}^{\mathcal{A}} M(\varphi_2) M_{\mathcal{A}}^{st} M(id)_{st}^{\mathcal{B}} = M(id)_{st}^{\mathcal{C}} M(\varphi_2) M(id)_{\mathcal{C}}^{st}$$

gdzie $\mathcal{C}$ jest szukaną bazą. Zatem

$$M(id)_{\mathcal{C}}^{st} = M_{\mathcal{A}}^{st} M(id)_{st}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/10 & 3 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/18 & -1/18 & 1 \\ 4/3 & 8/3 & 0 \\ 1/18 & -1/18 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 & 0 & 1 \\ 3/10 & 1/10 & 0 \\ 4/15 & 8/15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\mathcal{C} = \{(-1/9, 3/10, 4/15), (0, 1/10, 8/15), (1, 0, 0)\}$.

4. Policz 123 potęgę macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 4-a & 9 \\ -1 & -2-a \end{vmatrix} = (a^2 - 2a + 1) = (a-1)^2,$$

więc macierz Jordana to

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Natomiast wektor własny to $(-3, 1)$. Dla przekształcenia $\psi(x, y) = (3x + 9y, -x - 3y)$ mamy $\psi(-1, 0) = (-3, 1)$, zatem $\mathcal{A} = \{(-3, 1), (-1, 0)\}$ jest odpowiednią bazą Jordana. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{123} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 123 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -370 \\ 1 & 123 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 370 & 1107 \\ -123 & -368 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Niech φ będzie endomorfizmem skończonego wymiarowej przestrzeni liniowej K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V taką, że dla każdego $v \in W$, $\varphi(v) \in W$. Niech $\psi = \varphi|_W: W \rightarrow W$. Wykazać, że wielomian charakterystyczny ψ dzieli wielomian charakterystyczny φ .

Wystarczy uzupełnić bazę W do bazy V i rozpatrzyć macierz tego przekształcenia w tej bazie. Wtedy wielomian charakterystyczny ψ jest czynnikiem w wielomianie charakterystycznym całości ze względu na postać blokową macierzy.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, istnieje macierz $n \times n$ A , taka że $A^3 = A + I$. Udowodnij, że dla każdej takiej macierzy $\det A > 0$.

Zadanie z IMC 1999. Niech λ będzie taka, że $\lambda^3 = \lambda + 1$. Ten wielomian ma rzeczywiste rozwiązanie. Wtedy $A = \lambda I$ spełnia $A^3 = A + I$.

Wielomian $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1$ ten ma jeden dodatni pierwiastek x_1 (bo $p(0) < 0$), a pozostałe pierwiastki to dwa zespolone sprzężone x_2, x_3 . Jeśli jednak macierz spełnia równanie $A^3 = A + I$, to jeśli λ jest jego wartością własną, to $\lambda^3 v = \lambda v + v$ dla wektora własnego v , zatem λ jest pierwiastkiem wielomianu $p(x)$. Czyli $\det A = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\beta$, gdzie α, β są wielokrotnościami pierwiastków wielomianu charakterystycznego (x_2, x_3) muszą mieć tę samą wielokrotność, bo wielomian jest rzeczywisty). Ale $x_2 x_3 = |x_2|^2$, więc $\det A = x_1^\alpha (|x_2|^2)^\beta > 0$.